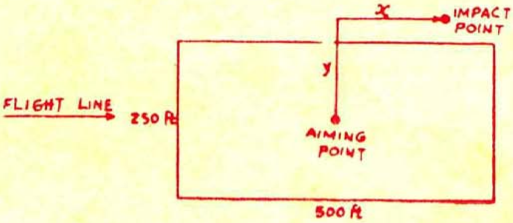
مجموعة الكتب الرياضية

٩

الرياضة للمسائل العسكرية والصناعية

دكتور محمد علي عنتابي

أستاذ الرياضة بجامعة الإسكندرية



طبعة أولى

الناشر منشأة المعارف بالإسكندرية

١٩٦٧

الرياضة للمسائل العسكرية والصناعية

وضع

دكتور محمد محمد عباسى

بكالوريوس فى الهندسة المدنية ـ بكالوريوس امتياز فى الرياضة الخاصة من جامعة لندن

ماجستير ودكتوراه فى الهندسة المدنية — دكتوراه فى الرياضة من جامعة لندن

حائز على جائزة الدولة فى العلوم

طبعة أولى

١٩٦٧

الناشر منشأة المعارف بالاسكندرية

مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

أتجهت الآراء اثناء وبعد الحرب العالمية الثانية الى الأهتمام بالشئون العسكرية بطريقة علميه صحيحة وقام علماء الرياضة بمحاولات ناجحه وتمكنوا من تطبيق الرياضة فى الشئون العسكرية وفى المصانع الحربية .

ويحتوى هذا الكتاب على بعض النظريات البسيطة الأساسيه فى الأحتمالات ونظرية البحث وكيفية تطبيق هـــذه النظريات فى الشئون العسكرية والصناعية . وآمل ان أتمكن مستقبلا من وضع الجزء الثانى الخاص بنظرية المباريات ونظرية الطوابير وتطبيقها فى المسائل العسكرية والصناعية .

اقدم خالص شكرى لمدير منشأة المعارف بالأسكندرية على تعاونه الصادق بنشر وطبع هذا الكتاب وكذلك الى رجال ومدير مطبعة رويال بالأسكندرية لعنايتهم الفائقة بطبع هذا الكتاب .

والله ولى التوفيق ؟

دكتور محمد محمد عباسى
أستاذ الرياضة بكليــة الهندسة
جامعة الأسكندرية

١٢ نوفمبر سنة ١٩٦٦

محتويات الكتاب

١

مقدمة فى الاحتمالات والاحصاء

Introduction to the theory of probability and statistics

مقدمة : يمكن تعرف الأحتمالات بطرق رياضية كثيرة يحتوى معظمها على صعوبات فلسفية وسنهمل فى هذه المقدمة هذه الصعوبات ونستعمل حسابا للأحتمالات مبنيا على التعريف التقليدى لأحتمال وقوع حدث E كالتكرار النسبي الذى يحدث به فى عدد كبير جدا من المحاولات . ونقصد بكلمة محاولة عمل ما أوتجربة من نوع معين من الأعمال الممكنة . نفرض على سبيل المثال اننا قمنا بمشاهدة السيارات التى تعبر خط مرور معين فى طريق رئيسى . نفرض أن السيارات من عدد ممكن n من الأطرزة المختلفة T_1 ، T_2 ، ... ، T_n ونفرض أن المحاولة هى مشاهدة طراز سيارة عند عبورها لخط المرور . فاذا شاهدنا سيارات عددها N — نفرض أن N_i هى عدد السيارات التى شاهدناها من الطراز T_i لذلك يكون :

$$N_1 + N_2 + \dots \dots + N_i + \dots \dots N_n = N$$

لذلك اذا رمزنا للسيارة بالرمز c فأن الاحتمال p_i ليكون الحدث c من الطراز T_i يعطى من

$$p_i = \lim_{N \to \infty} \frac{Ni}{N}$$

بفرض أن يكون لهذه النهاية وجود دائما .

ومن الواضح أن الاحتمال الذى عرفناه هو عدد يقع بين 0 ، 1 بحيث يكون :

$$p_1 + p_2 + \ldots \ldots p_n = 1$$

فأذا كانت E_i هى الحدث فى أن تكون c من الطراز T_i بحيث تكون الاحداث الممكنة هى E_1 ، E_2 ، .. ... ، E_n فأنه من المعتاد كتابه $P(E_i)$ للأحتمال E_i وتبعا لذلك ينتج أن :

$$P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ldots + P(E_n) = 1$$

الاحتمالات المركبة : Compound probabilities

إذا كان A ، B حدثين احتمال وقوعهما P (A) ، P (B) على الترتيب - سنعتبر الآن الحدثين الجديدين :

١ ـ الحدث A أو B

٢ ـ الحدث A ، B

نرمز للحدث فى الحالة الأولى بالرمز $A + B$ وفى الحالة الثانية بالرمز AB يطلق على $A + B$ أتحاد A ، B (union) وعلى AB اشتراك أو تقاطع A ، B (intersection) والمطلوب ايجاد $P(A + B)$ ، $P(AB)$ نعتبر لهذا الغرض المثال السابق للسيارات التى تعبر الطريق ونفرض أن بعض هذه السيارات ذات لون أحمر . فأذا مثلت c سيارة - نفرض أن A هى الحدث فى أن تكون c من الطراز T_i وأن B هى الحدث فى أن تكون c ذات لون أحمر .

نفرض أنه عند مشاهدتنا مرور N من السيارات وجدنا أن N_i من السيارات من الطراز T_i ، N_r من السيارات ذات لون أحمر ، N_{ri} من السيارات ذات لون أحمر ومن الطراز T_i أى أن :

$$P(A) = \frac{N_i}{N} \;,\; P(B) = \frac{N_r}{N}$$

(من المفروض أن كل نسبة تعطى الأحتمال عندما تقرب N من ما لا نهاية)

AB تعنى أن الحدث c سيـــارة ذات لون أحمر ومن الطـراز T_i لذلك يفتج أن :

$$P(AB) = \frac{N_{ri}}{N}$$

كذلك A + B يعنى أن c سيـارة ذات لون أحمـــر أو من الطراز T_i وعدد السيارات الذى له هذه الخاصية هو بطبيعة الحال :

$$N_r + N_i - N_{ri}$$

وينتج أن :

$$P(A + B) = (N_i + N_r - N_{ri}) / N$$

$$\therefore \; P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

وهذه هى العـلاقة الأسـاسية التى تصلح لأى حدثين A ، B وتربط احتمال الاتحـاد P (A + B) بالأحتمال المشترك P (AB) للحدثين A ، B

نفرض الآن أنه لاتوجد أى سيارة من الطراز T_i ذات لون أحمر ولـكن من المحتمل وجود سيارات من أطارزة أخرى ذات لون أحمر . لذلك فوقوع الحدث A (أى أن c سيارة من الطراز T_i) يتنـافى مع امكانية وقوع الحدث B (أى أن c سيارة ذات لون أحمر) والعكس بالعكس لذلك يقال أن A ، B حدثين مانعين متبادلين أى حدثين متنافيين لا يمـكن وقوعهما معـا وفى هذه الحالة نظـرا لأن $N_{ri} = 0$ فأنه من الواضح أن $P(AB) = 0$ وينتج أن

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

الاحتمالات المشروطة : Conditional probability

يحدث فى كثير من الأحيان أن يؤثر الوقوع الحتمى لحدث معين على احتمال وقوع حدث آخر . فمثلا فى الحالة السابقة إذا علمنا أن السيارة c ذات لون أحمر فأن احتمال أن تكون c من الطراز T_i هو $\frac{N_{ri}}{N_r}$ وهذا يختلف عن P (A) الذى يساوى $\frac{N_i}{N}$ ويسمى الاحتمال الأول بالاحتمال المشروط ونكتب P (A/B) لاحتمال وقوع A تحت شرط وقوع B لذلك :

$$P(A/B) = \frac{N_{ri}}{N_r} = \frac{N_{ri}}{N} \Big/ \frac{N_r}{N} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

وينتج أن :

$$P(AB) = P(A/B).\ P(B)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$P(AB) = P(B/A).\ P(A)$$

وهاتان نتيجتان أساسيتان أيضا فى نظرية الأحتمالات .

نفرض أننا قمنا بمشاهدتين أخرتين على السيارات التى تعبر الطريق

(١) مشاهدة التكرار النسبي $\frac{N_i}{N}$ للسيارات التى من الطراز T_i

(٢) مشاهدة بين N_r من السيارات ذات اللون الاحمر فقط التكرار النسبي $\frac{N_{ri}}{N_r}$ للسيارات التى من الطراز T_i

فاذا كان هذان التكراران متساويين أى أن :

$$\frac{N_i}{N} = \frac{N_{ri}}{N_r}$$

فأن الحدث A أى أن c من الطراز T_i لايتوقف على الحدث B أى أن c ذات لون أحمر أى أن السيارة من الطراز T_i لا تعتمد بأى طريقة على كونها ذات لون أحمر . ففى هذه الحالة ينتج أن :

$$P(A/B) = \frac{N_{ri}}{N_r} = \frac{N_i}{N} = P(A)$$

وتؤول العلاقة السابقة الى

$$P(AB) = P(A).\ P(B)$$

أى أنه فى الحدثين المستقلين A ، B فأن احتمال وقوع الحدثين A ، B معا هو حاصل ضرب احتمالى وقوع الحدثين .

هناك علاقة أخرى تتعلق بالاحتمال المشروط والتى قد نجدها نافعه فى بعض الاحيان ففى المثال السابق لعبور السيارات للطريق فأن الاحداث E_1 ، E_2 ، ... ، E_n حيث E_i تعنى أن c من الطراز T_i تشمل جميع الامكانيات لأن تكون c حتما لسيارة من احدى الأطراز التى عددها n . وإذا اعتبرنا حدثا آخر مثلا أن c سيارة ذات لون أحمر - فأنه من الواضح أن ذلك هو نفس الحدث فى أن تكون c سيارة ذات لون أحمر ومن الطراز T_1 أو c سيارة ذات لون أحمر ومن الطراز T_2 أو ... ... c سيارة ذات لون أحمر ومن الطراز T_n .

ويمكن التعبير عن ذلك بالرموز كما يأتى:

$$B = BE_1 + BE_2 + \dots \dots + BE_n$$

حيث يعنى الحدث B كما سبق أن c سيارة ذات لون أحمر .

ونظرا لأن BE_1 ، BE_2 ، ... .. ، BE_n احداث مانعة

فأنه ينتج أن :

$$P(B) = P(BE_1) + P(BE_2) + \dots + P(BE_n)$$

كذلك لـكل اشتراك (أى تقاطع) BE_i فأن :

$$P(BE_i) = P(B/E_i)\ P(E_i)$$

لذلك :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/E_i)\ P(E_i)$$

ويمكن تحقيق هذه العلاقة مباشرة بملاحظة أن :

$$P(B/E_i) = \frac{N_{ri}}{N_i}\ ,\ P(E_i) = \frac{N_i}{N}\ ,\ P(B) = \frac{N_r}{N}\ ,$$

$$N_r = N_{r_1} + N_{r_2} + \dots \dots + N_{rn}$$

وتسمى هـــذه النظرية بنظرية الأحتمال الكلى وهى تنص على أنه إذا كانت E_1 ، E_2 ، ... ، E_n مجموعة من الأحـــداث المانعة وكان من المحقق وقوع احداها ـ فاذا كانت A أى حدث آخر فأن :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/E_i)\, P(E_i)$$

وتستعمل هذه العلاقة فى كثير من الأحيان عندما يكون من الأسهل حساب الاحتمال المشروط $P(A/E_i)$ عن حساب قيمة $P(A)$ مباشرة.

سنذكر فيما يلى بعض الامثلة تساعدنا على فهم النظريات السابقة بعضها أمثلة عادية والأخرى ذات طابع تطبيق.

مثال (١)

إذا كان E_1 هو حدث سحب آس من ورق اللعب ، E_2 هو حدث سحب ملك فأن :

$$P(E_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad , \quad P(E_2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

أحتمال سحب آس أو ملك فى عملية سحب واحدة هو

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

لأنه لا يمكن سحب آس وملك فى عملية سحب واحدة فى نفس الوقت وتبعا لذلك يكون الحدثان ما نعين

مثال (٢)

اذا كان E_1 هو حدث سحب آس من ورق اللعب ، E_2 هو حدث سحب

ورقة سباتى — فأن E_1 ، E_2 حدثين غير ما نعين لأنه يمكن سحب آس سباتى لذلك فأحتمال سحب آس أو ورقة سباتى أو الاثنين هو

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

مثال (٣)

يحتوى صندوق على 25 بندقية منها 10 بندقيات غير صالحة الأستعمال فأذا سحبت بندقيتان من الصندوق حيثما اتفق أوجد احتمال

١) أن تكون البندقيتان صالحتين

٢) أن تكون البندقيتان غير صالحتين

٣) أن تكون أحدهما صالحة والأخرى غير صالحة

نفرض أن E هو الحدث فى أن البندقية الاولى المسحوبه صالحة ، F هو الحدث فى أن تكون البندقية الثانية المسحوبة صالحة . لذلك يكون EF هو الحدث فى أن تكون البندقيتان المسحوبتان صالحتين

$$P(EF) = P(E) . P(F/E)$$

$$= \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{7}{20}$$

٢) بنفس الطريقة يكون احتمال سحب بندقيتان غير صالحتين هو

$$\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3}{20}$$

٣) نفرض أن E_1 هو الحدث لان تكون البندقيتان صالحتين ،

E_2 هو الحدث لان تكون البندقيتان غير صالحتين

E_3 هو الحدث لان تكون احـــد البندقيتين صالحة والاخرى غير صالحة

ونظرا لانه يجب على الأقل وقوع أحد هذه الاحداث الثلاثة فأن

$$P(E_1 + E_2 + E_3) = 1$$

ولكن E_1 ، E_2 ، E_3 احداث غير مانعه أى أن

$$P(E_1 + E_2 + E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

$$\therefore \quad 1 = \frac{7}{20} + \frac{3}{20} + P(E_3)$$

$$\therefore \quad P(E_3) = \frac{1}{2}$$

ويمكن ايضـــا الحصول على هـذه النتيجة بأعتبار أن الحدث المطلوب هو $G + H$ حيث G هو الحدث فى أن تكون البندقية الأولى صالحة والثانية غير صالحة ، H هو الحدث فى أن تكون البندقية الأولى غير صالحة والثانية صالحة

$$P(G + H) = P(G) + P(H)$$

(لأن الحدثين مانعين)

$$= \frac{15}{25} \times \frac{10}{24} + \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} = \frac{1}{2}$$

مثال (٤)

يعمل كل من مدفعين مضادين للطائرات مستقلا عن الآخر فأذا كان احتمال اصابة احدى المدفعين لطائرة هو $\frac{1}{5}$ واحتمال اصابة المدفع الآخر لنفس الطائرة هو $\frac{1}{4}$ وأطلق كل من المدفعين قذيفة فى آن واحد فما هو احتمال

اولا : أن يصيب المدفعان معا الطائرة

ثانيا : أن لا يصيب المدفعان الطائرة

ثالثا : أن يصيب مدفع على الاقل من المدفعين الطائرة

أولا : احتمال أن يصيب المدفعان معا الطائرة هو :

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

ثانيا : احتمال أن لا يصيب المدفعان الطائرة هو :

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

ثالثا : احتمال أن يصيب واحد على الأقل من المدفعين الطائرة هو :

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

مثال (٥)

اذا كانت فرصة فشل طائرة فى العودة سالمه من عملية حربيه واحدة هى 5%

أوجد فرصه قيام الطائرة بثلاثين عمليه حربيه مع رجوعها سالمه .

فرصه رجوع الطائرة سالمـه فى عمليه حربيه واحدة هى 0.95

لذلك فأحتمال قيام الطائرة بثلاثين عمليه حربيه متتاليه مع رجوعها سالمه يساوى $(0.95)^{30}$ أى 0.215 وينتج من ذالك أن احتمال فشل رجوع الطائرة سالمه فى ثلاثين عمليه حربيه متتاليه يساوى $1 - 0.215 = 0.785$

ويمكن حساب الاحتمال الكلى لفشل الطائرة فى العودة سالمه من مجموع المتواليه الهندسيه

$$\frac{5}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{100} + \frac{5}{100}\left(\frac{95}{100}\right)^2 + \dots \dots \text{ to } 30 \text{ terms}$$

$$= 0.05\,[\,1 + 0.95 + (0.95)^2 + \dots \dots \text{ to } 30 \text{ terms}\,]$$

$$= 0.05\,\frac{1-(0.95)^{30}}{1-0.95} = 1-(0.95)^{30} = 1 - 0.215$$

$$= 0.785$$

[الحـــدود المكونه للمتوالية الهندسية هى احتمالات الاحداث المانعة : ١) الفشل فى العوده من العملية الأولى ٢) العوده سالمـه من العملية الأولى والفشل فى العوده سالمه من العملية الثانية ٣) العوده سالمه من العمليتين الأولتين والفشل فى العوده سالمـه من العمليه الثالثه وهكذا .]

مثال (٦)

يطلق كل من ثلاثه مدافع A ، B ، C قذيفه واحـده على هدف معين فأذا كان أحتمال اصابه كل مدفع للهدف هو:

A : 0.30

B : 0.25

C : 0.10

فأذا وجدت قذيفه واحدة فى الهدف أوجداحتمال أن تكون هذه القذيفه قد اطلقت من كل من المدافع A ، B ، C

هناك ثمانية أحداث ممكن وقوعها فى محاولة واحدة عند إطلاق الثلاثة قذائف كل من مدفع . نفرض للسهولة أن الرقم 1 يمثل إصابة والرقم 0 يمثل عدم إصابة فمثلا 0 — 1 — 1 تمثل الحدث فى أن قذيفة A وقذيفة B تصيب الهدف وتفشل قذيفة C فى إصابته وهكذا . وفيما يلى الثمانية أحداث الممكن وقوعها مع احتمالات حدوثها فى محاولة واحدة :

الأحداث الممكن وقوعها	الاحتمال
0 — 0 — 0	(.70) (.75) (.90)
0 — 0 — 1	(.70) (75) (.10)
0 — 1 — 0	(.70) (.25) (.90)
0 — 1 — 1	(.70) (.25) (.10)
1 — 0 — 0	(.30) (.75) (.90)
1 — 0 — 1	(.30) (.75) (.10)
1 — 1 — 0	(.30) (.25) (.90)
1 — 1 — 1	(.30) (.25) (.10)

وحيث أنه وجدت قذيفة واحدة فى الهدف — لذلك نعتبر الحالات الثلاث فقط وهى 0 — 0 — 1 ، 0 — 1 — 0 ، 1 — 0 — 0 وتكون الأحتمالات الجديدة هى الأحتمالات الأصلية مقسوم كل منهــا على مجمــوع الاحتمالات الثــلاثة فالأحـتمال المشروط 0 — 0 — 1 يعطى وقـوع أحـد الأحـداث 0 — 0 — 1 ، 0 — 1 — 0 ، 1 — 0 — 0 وبذلك تـكون قيمته هى

$$\frac{27}{55} = \frac{(.30)\,(.75)\,(.90)}{(.30)\,(.75)\,(.90) + (.70)\,(.25)\,(.90) + (.70)\,(.75)\,(.10)}$$

لذلك فأحتمال أن تـكون القذيفة الموجودة فى الهدف هى التى أطلقت مـن المدفع A يساوى $\frac{27}{55}$

وبالمثل أحتمال أن تـكون القذيفة الموجودة فى الهدف هى التى أطلقت مـن المدفع B يساوى

$$\frac{21}{55} = \frac{(.70)\,(.25)\,(.90)}{(.30)\,(.75)\,(.90) + (.70)\,(.25)\,(.90) + (.70)\,(.75)\,(.10)}$$

واحتمال أن تـكون القذيفة الموجودة فى الهدف هى الــتى أطلقت من المدفع C يساوى

$$\frac{7}{55} = \frac{(.70)\,(.75)\,(.10)}{(.30)\,(.75)\,(.90) + (.70)\,(.25)\,(.90) + (.70)\,(.75)\,(.10)}$$

وكمراجعة للحل يلاحظ أن

$$\frac{27}{55} + \frac{21}{55} + \frac{7}{55} = 1$$

٢

المتغيرات العشوائية وتوزيعات الاحتمال

Random variables and probability distributions

تظهر فكرة المتغير العشوائى عند محاولة دراسة خاصية أو نتيجة من تجربة ما تجرى فى عدد لانهائى من المرات — مثال ذلك الطلب المتغير للبنزين لأصحاب السيارات فى محطة بنزين فالتجربة فى هذه الحالة هى الطلب والخاصية هى حجم الطلب . وبطبيعة الحال اشترى كثير من العملاء البنزين فى الماضى ولكن لايمكن لصاحب محطة البنزين أن يعلم بصفة قاطعة طلب العميل التالى . ويسمى الحجم x للطلب متغير عشوائى ويجب أن نفهم أن قيمة x فى أى محاولة تتعين بالصدفة . ويمكن أخذ قيم x الممكنة من مدى محدود أو (نظريا) من مدى لانهائى R وسنعتبر الحالتين الآتيتين :

١) R هى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة قد تحتوى على الصفر أو لاتحتويه

٢) R هى الفترة المستمرة $(0 , \infty)$.

فى الحالة الأولى :

$$P(x = r) = p_r \qquad (r = 0, 1, 2 \dots, \infty)$$

أى أن p_r هو احتمال أن تكون قيمة x فى محاولة واحدة يساوى r وتسمى المتتابعة $(p_0 , p_1 , \dots \dots \dots)$ توزيع كثافة الاحتمال Probability density distribution وفى الحالة الثانية نعتبر فترة du تقع بين u ، u + du ونفرض أن :

$$P(u < x < u + du) = f(u)\,du \qquad (0 < u < \infty)$$

أى أن $f(u)\,du$ هو احتمال أن تأخذ x قيمة فى الفترة $(u, u + du)$ وتسمى $f(u)$ أيضا توزيع كثافة الإحتمال . وللتمييز بين الحالتين يسمى التوزيع منفصل أو غير مستمر (discrete) فى الحالة الأولى ومستمر (continuous) فى الحالة الثانية . مع ملاحظة أنه فى كلتا الحالتين فأن مجموع الاحتمالات المأخوذة فى المدى الكامل يساوى 1 أى أن :

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \quad , \qquad \int_0^{\infty} f(u)\,du = 1$$

بفرض أن الدالة $f(u)$ قابلة للتكامل .

ومن المهم التميز بين توزيع كثافة الاحتمال وما يسمى توزيع الاحتمال أو بتعبير أدق توزيع الاحتمال التراكمى . فالأخير هو دالة $F(u)$ تحدد الاحتمال بأن x لاتزيد عن قيمة معينة u أى أن $F(u) = P(x \leqslant u)$. فنى حالة التوزيع المنفصل إذا كانت $u = r$ فأن :

$$F(r) = P(x \leqslant r) = \sum_{i=0}^{r} p_i$$

بينما فى حالة التوزيع المستمر .

$$F(u) = P(x \leqslant u) = \int_0^{u} f(t)\,dt$$

ويجب أن نعلم أن $F(r)$ ، $F(u)$ هما دالتان غير متناقصتان فى r ، u لهما الخاصتين : $F(0) = 0 \quad (\text{if } p_0 = 0)$ ، $F(\infty) = 1$

وإذا علمنا دالة توزيع الاحتمال فأنه يمكننا إيجاد كثافة التوزيع ففى حالة التوزيع المنفصل فأن :

$$p_r = F(r) - F(r-1)$$

بينما تحتاج حالة التوزيع المستمر إلى بعض العناية والحذر . فأذا أعطيت $F(u)$ كدالة قابلة للتفاضل فأن :

$$f(u) = \frac{d}{du} F(u)$$

وقد تكون الدالة $F(u)$ غير قابلة للتفاضل وقد يكون جزء منها قابل للتفاضل وجزء آخر غير قابل للتفاضل . نعتبر على سبيل المثال الحالة البسيطة التى يكون من المحقق فيها أن تأخذ x القيمة a فى كل محاولة لذلك تكون $F(u)$ هى دالة الوحدة التى تعطى من :

$$F(u) = 0 \qquad (u < a) \quad , \quad F(u) = 1 \qquad (u > a)$$

وتكون دالة كثافة الأحتمال هى تفاضل دالة الوحدة السابقة أى دالة ديراك دلتا $\delta(u - a)$.

وكمثال لدالة توزيع احتمال جزء منها مستمر والآخر غير مستمر — نعتبر متغير عشوائى x بحيث يكون

$$P(0 < x \leqslant u) = F(u) \qquad (u > 0),$$

$$P(x = 0) = p_0$$

لذلك تعطى دالة كثافة الأحتمال $f(u)$ من:

$$f(u) = \frac{d}{du} F(u) + p_0 \, \delta(u)$$

وتظهر مثل هذه الحالة فى مسألة الطرابير (خطوط الأنتظار) التى سنشرحها فى الجزء الثانى .

ونظرا لأن :

$$\int_0^\infty f(u) \, du = 1$$

لذلك يجب أن يكون $F(\infty) = 1 - p_0$

ملاحظة :

يجد القارىء شرحا وافيا لدالة الوحدة ودالة ديراك دلتـا فى كتاب المؤلف « الرياضة للهندسة المدنية » الباب الأول .

عزوم التوزيع : The moments of a distribution.

يعرف العزم الذى رتبتـه k للتوزيع المنفصل حيث $P(x = r) = p_r$ بأنه يساوى μ_k حيث :

$$\mu_k = \sum_{r=0}^{\infty} p_r \, r^k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

وفى حالة التوزيع المستمر الذى فيه دالة كثافة التوزيع هى f(u) فأن العزم الذى رتبته k يعرف من :

$$\mu_k = \int_0^{\infty} u^k \ f(u) \ du$$

وفى الحالة العامة إذا احتوت دالة توزيع الأحتمال F(u) على جزء مستمر وآخر غير مستمر فأن العزم الذى رتبته k يعطى من .

$$\mu_k = \int_0^{\infty} u^k \ d \ F(u)$$

وهو كما نعلم تكامل "steiltje" وتشمل هذه الحالة العامة الحالتين الخاصتين السابقتين .

ويسمى العزم الأول μ_1 بمتوسط أو وسط x (mean) أو القيمة المتوقعة فى x . فلأى دالة g (x) تعرف القيمة المتوقعة بأنها E [g (x)] حيث :

$$E [g (x)] = \int_0^{\infty} g (u) \ d \ F (u)$$

لذلك ينتج أن :

$$\mu_1 = E (x) \quad , \quad \mu_k = E (x^k)$$

ويعرف تباين x (variance) بأنه يساوى $E \left[\{ x - E (x) \}^2 \right]$ أى أنه العزم الثانى حول المتوسط . فبكتابة $\bar{x} = E (x)$ فأن :

$$E[(x-\bar{x})^2] = E(x^2) - 2\bar{x}E(x) + \bar{x}^2$$

$$= \mu_2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \mu_2 - \bar{x}^2$$

وبأعطاء التباين الرمز σ^2 ينتج أن :

$$\sigma^2 = \mu_2 - \bar{x}^2$$

وتسمى σ بالانحراف المعيارى (standard deviation) . ويمكن كتابة النتيجة السابقة على الصورة .

$$\sigma^2 + \bar{x}^2 = \mu_2$$

هناك نظرية هامة تربط الانحراف المعيارى σ بمتوسط مربع الانحرافات s عن أى قيمة x_0 :

$$s^2 = E[(x-x_0)^2]$$

$$= E\left[\left\{(x-\bar{x}) + (\bar{x}-x_0)\right\}^2\right]$$

$$= E[(x-\bar{x})^2 + 2(\bar{x}-x_0)(x-\bar{x}) + (\bar{x}-x_0)^2]$$

$$= E(x-\bar{x})^2 + 2(\bar{x}-x_0)E(x-\bar{x}) + (\bar{x}-x_0)^2$$

ولكن :

$$E(x-\bar{x}) = E(x) - E(\bar{x})$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0$$

[من الواضح أن $E(1) = 1$]

$$\therefore \quad s^2 = \sigma^2 + (\bar{x} - x_0)^2$$

وتشبه هـــذه العلاقة – العلاقة التي تربط مربع نصف قطر القصور الذاتي حول محور يمر بمركز الثقل وحول محور مواز له عند نقطة أخرى .

مثـال (١)

يعطي الجدول الآتي عشر قراءات لنفس الكمية أخذت تحت نفس الشروط من كل من الراصدين A ، B

A : 6.116, 6.125, 6.127, 6.129, 6.130, 6.136, 6.137, 6.137, 6.141, 6.146

B : 6.112, 6.118, 6.123, 6.124, 6.130, 6.136, 6.137, 6.138, 6.139, 6.141

أحسب القيمة المتوسطة والانحراف المعياري لقراءات كل راصد وأذكر أي راصد في اعتقادك يمكن الاعتماد عليه أكثر ولماذا ؟

لتبسيط العمل الحسابي بقدر الإمكان نطرح 6.130 من كل قراءة وبذلك تكون القيم هي :

A : − 0.014, − 0.005, − 0.003, − 0.001, 0, 0.006, 0.007, 0.007, 0.011, 0.016

B : − 0.018, − 0.012, − 0.007, − 0.006, 0, 0.006, 0.007, 0.008, 0.009, 0.011

القيمة المتوسطة $\bar{x}_A$ لقراءات الراصد A :

$$6.130 + \frac{0.024}{10} = 6.1324$$

القيمة المتوسطة $\bar{x}_B$ لقراءات الراصد B هى .

$$6\,130 - \frac{0.002}{10} = 6.1298 = 6.130 \quad \text{approx.}$$

ولأيجاد الانحراف المعيارى مباشرة يكون العمل الحسابى شاقا — لذلك نبحث أولا عن قيمة متوسط مربع الانحرافات s^2 عن قيمة سهلة ولتكن 6.130 ثم نحسب بعد ذلك الانحراف المعيارى بالقانون السابق إثباته :

$$s^2 = \frac{\Sigma (x - x_0)^2}{10}$$

حيث $x_0 = 6.130$

$$s^2_A = \frac{1}{10} (196 + 25 + 9 + 1 + 0 + 36 + 49 + 49 + 121 + 256) \times 10^{-6}$$

$$= 742 \times 10^{-7}$$

$$s^2_B = \frac{1}{10} (324 + 144 + 49 + 36 + 0 + 36 + 49 + 64 + 81 + 121)\, 10^{-6}$$

$$= 904 \times 10^{-7}$$

$$\sigma^2_A = s^2_A - (\bar{x}_A - 6.130)^2$$

$$= 742 \times 10^{-7} - (0.0024)^2$$

$$= 74.2 \times 10^{-6} - 5.76 \times 10^{-6} = 68.4 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_A = 8.3 \times 10^{-3} = 0.0083$$

$$\sigma^2_B = s^2_B - (\bar{x}_B - 6.130)^2$$

$$= 90.4 \times 10^{-6} - (0.0002)^2$$

$$= 90 \times 10^{-6} \text{ approx.}$$

$$\sigma_B = 9.5 \times 10^{-3} = 0.0095$$

لذلك يمكن الاعتماد على الراصد A أكثر من الراصد B لأن الانحراف المعيارى له أقل من الانحراف المعيارى للراصد B

توزيعات الاحتمال المنفصلة : Discrete probability distributions

توجد أنواع قليلة من توزيعات الاحتمال المنفصلة وهى ذات أهمية كبيرة فى التطبيقات العسكرية والصناعية وسنشرح فيما يلى توزيعات الاحتمال المنفصلة الآتيـــة :

١) توزيع ذى الحدين Binomial distribution

٢) توزيع براسون Poisson distribution

٣) التوزيع المنتظم Uniform distribution

٤) التوزيع الهندسى Geometric distribution

١ ـ توزيع ذى الحدين : Binomial distribution

إذا كان احتمال وقوع حدث فى محاولة واحدة يساوى α فأن الاحتمال p_r لوقوع الحدث r من المرات بالضبط فى محاولات مستقلة عددها n يعطى من القانون :

$$p_r = {}^nC_r \alpha^r \beta^{n-r}$$

حيث $\alpha - 1 = \beta$ هى احتمال فشل وقوع الحدث فى محاولة واحدة ويلاحظ أن p_r هو الحد الذى رتبته $n + 1$ فى مفكوك $(\beta + \alpha)^n$ لذلك سمى هذا الاحتمال بأحتمال ذى حدين . ويمكن اثبات هذا القانون كما يأتى :

احتمال وقوع حدث فى مجموعة معينة بمحاولات عددها r وفشل وقوعه فى المحاولات الباقية التى عددها $n - r$ يساوى $\alpha^r \beta^{n-r}$ ولكن نظرا لأن عدد المحاولات كلها يساوى n فأن عدد الطرق التى ينجح فيها الحدث r من المرات يساوى عدد توافيق n من الأشيـــاء مأخوذة r فى كل مرة أى ${}^nC_r$ لذلك يعطى الاحتمال المطلوب p_r للنجاح r من المرات والفشل $n - r$ من المرات من :

$$p_r = {}^nC_r \alpha^r \beta^{n-r}$$

أى الحد الذى رتبته $r + 1$ فى مفكوك $(\beta + \alpha)^n$

عدد مرات النجاح المتوقعة أو المتوسط هو العزم الاول $\mu_1 = E(r)$ فى توزيع ذى الحدين :

$$\bar{r} = \mu_1 = E(r) = \sum_{r=0}^{n} r\, p_r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r\, {}^nC_r \alpha^r \beta^{n-r}$$

$$= \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r \alpha^r \beta^{n-r}$$

$$= \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (\beta + \alpha)^{n}$$

$$= n\alpha(\beta + \alpha)^{n-1}$$

ونظرا لأن $\beta + \alpha = 1$ فأن

$$\mu_1 = n\ \alpha$$

أو بعبارة أخرى فأن عدد مرات النجاح المتوقعة يساوى عدد المحاولات مضروبا في احتمال النجاح في محاولة واحدة كما يجب أن يكون .

يعطى العزم الثانى μ_2 لتوزيع ذى الحدين من

$$\mu_2 = E(r^2) = \sum_{r=0}^{n} r^2\ p_r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r^2\ {}^nC_r\ \alpha^r\ \beta^{n-r}$$

$$= \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\ \alpha^r\ \beta^{n-r} \right]$$

$$= \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (\beta + \alpha)^{n} \right]$$

$$= \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\alpha\ n\ (\beta + \alpha)^{n-1} \right]$$

$$= \alpha \Big[\alpha\, n\, (n-1)\, (\beta + \alpha)^{n-2} + n\, (\beta + \alpha)^{n-1} \Big]$$

وبوضع $\beta + \alpha = 1$ ينتج أن :

$$\mu_2 = \alpha\ [\alpha n (n-1) + n].$$

$$= n\alpha + n(n-1)\alpha^2$$

يعطى الانحراف المعيارى σ من العلاقة :

$$\sigma^2 = \mu_2 - \{E(r)\}^2$$

$$= \mu_2 - \bar{r}^2$$

$$= n\alpha + n(n-1)\alpha^2 - n^2\alpha^2$$

$$= n\alpha - n\alpha^2 = n\alpha(1-\alpha)$$

ولكن $\beta = 1 - \alpha$ وينتج أن :

$$\sigma^2 = n\alpha\beta$$

مثال (٢)

عند فحص عدد كبير من البنادق الحربية وجد أن 5% منها فاسدة فأذا أختبرت 5 بنادق أوجد أحتمال وجود 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 بندقية فاسدة

فى هذا المثال

$$n = 5\ ,\ \beta = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}\ ,\ \alpha = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

أحتمال عدم وجود أى بندقية فاسدة يساوى .

$$^5C_0\ \alpha^0\ \beta^5 = \beta^5 = \left(\frac{19}{20}\right)^5 = 0.774$$

أحتمال وجود بندقية واحدة فاسدة يساوى .

$$^5C_1\ \alpha\ \beta^4 = 5\ (\frac{1}{20})\ (\frac{19}{20})^4 = 0.204$$

أحتمال وجود بندقيتين فاسدتين يساوى :

$$^5C_2\ \alpha^2\ \beta^3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1}\ (\frac{1}{20})^2 (\frac{19}{20})^3 = 0.021$$

أحتمال وجود ثلاث بنادق فاسدة يساوى :

$$^5C_3\ \alpha^3\ \beta^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1}\ (\frac{1}{20})^3 (\frac{19}{20})^2 = 0.001$$

أحتمال وجود أربع بنادق فاسدة يساوى :

$$^5C_4\ \alpha^4\ \beta = 5\ (\frac{1}{20})^4 (\frac{19}{20}) = 0$$ تقريبا

أحتمال وجود خمس بنادق فاسدة يساوى :

$$^5C_5\ \alpha^5\ \beta^0 = \alpha^5 = (\frac{1}{20})^5 = 0$$ تقريبا

مثال (٣)

فرصة اصابة العمال بمرض ينتشر فى أحـــد المصانع هى 10% أوجد أحتمال إصابة خمسة عمال أو أكثر بهذا المرض فى مجموعة تعمل سويا عددها سبعة عمال .

فى هـذا المثـال $\alpha = \frac{1}{10}$ ، $\beta = \frac{9}{10}$ ، $n = 7$

أحتمال أصابة خمسة عمال بالمرض يساوى :

$$^{7}C_{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{2} = \frac{21 \times 81}{10^{7}}$$

أحتمال أصابة ستة عمال بالمرض يساوى :

$$^{7}C_{6}\left(\frac{1}{10}\right)^{6}\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{7 \times 9}{10^{7}}$$

أحتمال أصابة سبعة عمال بالمرض يساوى :

$$^{7}C_{7}\left(\frac{1}{10}\right)^{7}\left(\frac{9}{10}\right)^{0} = \frac{1}{10^{7}}$$

لذلك فأحتمال أصابة خمسة أو سته أو سبعة عمال بالمرض يساوى :

$$\frac{21 \times 81}{10^{7}} + \frac{7 \times 9}{10^{7}} + \frac{1}{10^{7}} = \frac{1765}{10^{7}} = 0.0001765$$

٢ – توزيع بواسون : Poisson distribution.

توزيع بواسون هو توزيع ذى حدين فيه n كبيرة جـدا وأحتمال وقوع الحدث p فى محاولة واحد صغير جدا — فأذا طبقنا أحتمالات ذى الحدين عندما تـكون n كبيرة فأنه يصعب حساب كميـات مثل $^{100}C_{10}(0.1)^{10}(0.9)^{90}$ وتوزيع بواسون فى غاية الأهمية فى التطبيقات العملية والصنـاعية وسنجـد فى الأبواب القادمة تطبيقات كثيرة عليه فى المسائل العسكرية ويمكن أستنتاج توزيع بواسون من توزيع ذى الحدين كما يأتى :

نفرض أن $\lambda = n\alpha$ حيث n كبيره ، α صغيرة ، $\lambda = n\alpha$ كميـة محدودة . احتمال عدد النجاح يساوى :

$$\beta^n = (1-\alpha)^n = (1-\frac{\lambda}{n})^n$$

وهذا يؤول الى $e^{-\lambda}$ عندما تقرب n من لانهاية

[ملاحظة: من المعلوم أن : $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$]

أحتمال نجاح واحد يساوى :

$$^nC_1\,\alpha\beta^{n-1} = n\alpha(1-\alpha)^{n-1}$$

$$= \lambda(1-\frac{\lambda}{n})^{n-1}$$

$$= \lambda\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{1-\frac{\lambda}{n}}$$

وهذا يؤول الى $\lambda e^{-\lambda}$ عندما تقرب n من لا نهاية

أحتمال نجاحين يساوى :

$$^nC_2\,\alpha^2\beta^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2(1-\alpha)^{n-2}$$

$$= \frac{n\alpha(n\alpha-\alpha)}{2!}\;\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^2}$$

$$= \frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{2!}\;\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^2}$$

وهذا يؤول الى $\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$ عندما تقرب n من لانهاية ، α من الصفر
وبوجه عام احتمال نجاح عدده r يساوى

$$ {}^{n}C_{r} \alpha^{r} \beta^{n-r} = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ \dots\ (n-r+1)}{r\,!} \alpha^{r} (1-\alpha)^{n-r} $$

$$ = \frac{n\alpha\ (n\alpha-\alpha)\ (n\alpha-2\alpha)\ \dots\ (n\alpha-r\alpha+\alpha)}{r\,!} \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^{n}}{(1-\frac{\lambda}{n})^{r}} $$

$$ = \frac{\lambda\ (\lambda-\alpha)\ (\lambda-2\alpha)\ \dots\ (\lambda-r\alpha+\alpha)}{r\,!} \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^{n}}{(1-\frac{\lambda}{n})^{r}} $$

وهذا يؤول الى $\frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$ عندما تقرب n من لانهاية ، α من الصفر لذلك تكون احتمالات فرص نجاح عددها 0 ، 1 ، 2 ، ... ، r ، ... هى على الترتيب :

$$ e^{-\lambda},\ \lambda e^{-\lambda},\ \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda},\ \dots,\ \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda},\ \dots $$

أى : $p_r = \frac{\lambda^r}{r!}$ حيث r تساوى 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، ...

مجموع جميع الاحتمالات فى توزيع براسون يساوى :

$$ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} $$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

كما يجب أن يكون ليتحقق شروط توزيع الاحتمال .

عدد مرات النجاح المتوقع أو المتوسط هو العزم الأول $\mu_1 = E(r)$ لذلك في توزيع بواسون

$$\bar{r} = \mu_1 = E(r_1) = \sum_{r=0}^{\infty} r \; p_r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r \lambda^r e^{-\lambda}}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{R=0}^{\infty} \frac{\lambda^R}{R!}$$

(بوضع $R = r - 1$)

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

كذلك يعطى العزم الثانى $\mu_2 = E(r^2)$ لتوزيع بواسون من

$$\mu_2 = E(r^2) = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 \; p_r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r^2 \lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r-1+1}{(r-1)!} \lambda^{r-1} . \lambda$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{r=2}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{r-2}}{(r-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} . e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} . e^{\lambda}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma^2 = \mu_2 - \bar{r}^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{\lambda}$$

ولتطبيق توزيع بواسون فى المسائل العملية نحتاج لحساب قيمة $e^{-\lambda}$ لقيم
λ المختلفة كما فى الجدول الآتى :

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
.01	.9900	.1	.9048	1	.3679
.02	.9802	.2	.8187	2	.1353
.03	.9704	.3	.7408	3	0498
.04	.9608	.4	.6703	4	.0183
.05	.9512	.5	.6065	5	.0067
.06	.9418	.6	.5488	6	.0025
.07	.9324	.7	.4966	7	.0009
.08	.9231	.8	.4493	8	.0003
.09	.9139	.9	.4066	9	.0001

ونظرا لأن :

$$e^{-(x+y+z)} = e^{-x} . e^{-y} . e^{-z}$$

لذلك يمكن حساب $e^{-\lambda}$ لقيم λ غير موجودة فى الجدول فمثلا لحساب قيمة $e^{-5.23}$ أى $e^{-.03} . e^{-.2} . e^{-5}$ يساوى

$$0.0067 \times 0.8187 \times 0.9704 = 0.0053$$

مثال (٤)

احتمال اصابة جندى برد فعل سيء من الحقن بمصل مرض معين يساوى 0.001 فأذا ارسلت أورطه من 2000 جندى بعد تحصينها بهذا المصل للحرب فى بلد

معين ينتشر فيه هذا المرض .

أوجد أحتمال الاصابة برد فعل سيء :

أولا : لثلاثة جنود

ثانيا : لأكثر من جنديين

فى هـــذا المثـال :

$$n = 2000 \quad , \quad \alpha = 0.001$$

$$\lambda = n\,\alpha = 2000 \times 0.001 = 2$$

احتمال اصابة ثلاثة جنود برد فعل سيء يساوى :

$$\frac{\lambda^3}{3!}\, e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3 \times 2 \times 1}\, e^{-2}$$

$$= \frac{4}{3} \times 0.1353 = 0\ 1804$$

احتمال اصابة أكثر من جنديين برد فعل سيء يساوى :

١ — (احتمال عدم اصابة أى جندى + احتمال اصابة جندى + احتمال اصابة جنديين برد فعل سيء)

احتمال عدم اصابة أى جندى برد فعل سيء يساوى :

$$e^{-\lambda} = e^{-2} = 0.1353$$

احتمال اصابة جندى واحد برد فعل سيء يساوى :

$$\lambda e^{-\lambda} = 2 \times 0.1353 = 0.2706$$

احتمال اصابه جنديين برد فعل سيء يساوى :

$$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = 2e^{-2} = 2 \times 0.1353 = 0.2706$$

لذلك فأحتمال اصابه أكثر من جنديين برد فعل سيء يساى :

$$1 - (0.1353 + 0.2706 + 0.2706) = 0.3235$$

ويلاحظ أنه لو حسبنا احتمال اصابه أكثر من جنديين برد فعل سيء باستعمال توزيع ذى الحدين فأن الأحتمال يساوى :

$$1 - [{}^{2000}C_0\ (0.001)^0\ (0.999)^{2000} + {}^{2000}C_1 (0.001)^1 (0.999)^{1999} + {}^{2000}C_2\ (0.001)^2\ (0.999)^{1998}]$$

وتكون العمليات الحسابية فى غاية الصعوبة لذلك تظهر أهمية توزيع بواسون

٣ ـ التوزيع المنتظم : Uniform distribution

فى هذا التوزيع :

$$P(x = r) = p_r = \frac{1}{n+1} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

ويلاحظ أن:

$$\sum_{r=0}^{n} p_r = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} 1 = \frac{1}{n+1}(n+1) = 1$$

كما يجب أن يكون ليتحقق شرط توزيع الاحتمال

يعطى العزم الأول (أو المتوسط) μ_1 للتوزيع المنتظم من :

$$\mu_1 = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \tfrac{1}{2} n(n+1) = \frac{n}{2}$$

ويعطى التباين σ^2 من :

$$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2 \frac{1}{n+1} - \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{1}{6} n(2n+1) - \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6}$$

ملاحظة :

$$\sum_{r=0}^{n} r = 1 + 2 + 3 + \dots \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1) \quad ,$$

$$\sum_{r=0}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

[راجع كتاب الرياضة للجامعات والمعاهد للمؤلف — الجزء الأول — الباب الرابع صفحة ٨٧]

٤) **التوزيع الهندسى :**

Geometric distribution.

فى هذا التوزيع :

$$P(x = r) = p_r = a^r (1 - a) \quad (r = 0, 1, 2, \dots \dots \text{ to } \infty)$$

حيث a بارامتر موجب أصغر من 1

يلاحظ أن :

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_r = \sum_{r=0}^{\infty} a^r (1 - a)$$

$$= (1 - a) \sum_{r=0}^{\infty} a^r = (1 - a) \frac{1}{1 - a} = 1$$

كما يجب أن يكون ليتحقق شرط توزيع الاحتمال

يعطى العزم الأول (أو المتوسط) μ_1 للتوزيع الهندسى من :

$$\mu_1 = \sum_{r=0}^{\infty} r a^r (1 - a)$$

$$= a (1 - a) \sum_{r=0}^{\infty} r a^{r-1}$$

$$= a (1 - a) \frac{1}{(1 - a)^2} = \frac{a}{1 - a}$$

ملاحظة :

$$\left[\sum_{r=0}^{\infty} r\,a^{r-1} = 1 + 2a + 3a^2 + \dots \dots + \infty = \frac{1}{(1-a)^2} \qquad |a| < 1\right]$$

ويعطى التباين σ^2 من :

$$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{\infty} r^2\,a^r(1-a) - \frac{a^2}{(1-a)^2}$$

$$= (1-a)\sum_{r=0}^{\infty} r^2 a^r - \frac{a^2}{(1-a)^2}$$

ولايجاد $\sum_{r=0}^{\infty} r^2 a^r$ نعلم أنه إذا كان $|a| < 1$ فأن :

$$\sum_{r=0}^{\infty} r\,a^{r-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty} r\,a^r = \frac{a}{(1-a)^2}$$

وبأخذ تفاضل هذه العلاقة الأخيرة بالنسبة الى a ينتج أن :

$$\sum_{r=0}^{\infty} r^2\,a^{r-1} = \frac{(1-a)^2 + 2a\,(1-a)}{(1-a)^4} = \frac{1+a}{(1-a)^3}$$

$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{\infty} r^2 a^r = \frac{a + a^2}{(1-a)^3}$$

وينتج أن :

$$\sigma^2 = \frac{a + a^2}{(1-a)^2} - \frac{a^2}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

مثال (٥)

يحتاج انتاج قطعة معينة فى مصنع حربى الى استعمال آلتين A ، B وتتعرض القطعة للكسر فى كل آلة وعند كسر قطعة فى الآلة تتعطل هذه الآلة مؤقتا حتى يتم أصلاحها . فأذا كان احتمال كسر القطعة فى الآلة A يساوى p_1 وفى الآلة B يساوى p_2 أوجد عدد القطع المتوقع الذى يمكن انجازه قبل أن تتعطل الآلة الأولى .

نفرض أن x تمثل عدد القطع التى يتم انجازها قبل أن تقف عملية الانتاج يأخذ المتغير العشوائى x القيمة 0 اذا وقع أحد هذين الحدثين المانعين :

١) تتكسر أول قطعة فى الآلة A

٢) لا تتكسر أول قطعة فى الآلة A ولكنها تتكسر فى الآلة B

لذلك ينتج أن :

$$P\{x = 0\} = p_1 + (1 - p_1)\, p_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

نفرض أن :

$$P_0 = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

ومن الواضح أن P_0 هى أيضا احتمال عدم خروج أى قطعة نبدأ بها سالمة

يأخذ المتغير العشوائى x القيمة r اذا وقع كل من الحدثين

١) خروج r من القطع الاولى سالمة

٢) تنكسر القطعة r + 1

لذلك ينتج أن :

$$P \{ x = r \} = (1 - P_0)^r \, P_0$$

فبوضع $a = 1 - P_0$ ينتج أن :

$$P \{ x = r \} = a^r (1 - a)$$

وهو توزيع هندسى ويعطى المتوسط أى عـــدد القطع المتوقع الذى يمكن انجازه من

$$\mu_1 = \frac{a}{1 - a}$$

$$= \frac{1 - P_0}{P_0} = \frac{1}{P_0} - 1$$

$$= \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} - 1$$

الدوال المولدة للاحتمال : Probability generating functions.

فى حالة التوزيع الغير مستمر يكون من المناسب فى كثير من الاحيان استعمال ما يسمى الدالة المولده للاحتمال للتوزيع وهى متسلسلة فى قـــوى z التصاعدية فيها معامل z^r يساوى p_r حيث $(r = 0 , 1 , 2 , \ldots)$ ويعطى لها الرمز $\pi (z)$ حيث :

$$\pi(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r z^r$$

ففى كثير من الأحوال نحتاج الى تعيين $p_0 , p_1 , \ldots$ بدلالة المتغيرات الموجوده لدينا . وقد تكون هذه العملية فى كثير من الاحيان طويلة أو غير ممكنه من الوجهة العملية . ومن جهة أخرى قد يكون من الأسهل نسبيا تعيين $\pi(z)$ كتسلسلة فى قوى z التصاعدية ومساواة معامل z^r فى الطرفين وتستعمل هذه الطريقة فى كثير من التطبيقات العملية وعلى الأخص فى نظرية الطوابير (خطوط الانتظار) والتى سنشرحها فى الجزء الثانى .

١ — فى توزيع ذى الحدين الذى فيه : $p_r = {}^nC_r \, \alpha^r \beta^{n-r}$

$(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ، $\alpha + \beta = 1$ فأن :

$$\pi(z) = (\beta + \alpha z)^n$$

٢ — فى توزيع بواسون الذى فيه : $p_r = \lambda^r e^{-\lambda} / r!$

$(r = 0, 1, 2, \ldots \text{ to } \infty)$ فأن :

$$\pi(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

٣ — فى التوزيع الهندسى الذى فيه : $p_r = a^r (1-a)$

$(r = 0, 1, 2, \ldots \text{ to } \infty)$ ؟ a بارامتر موجب أصغر من 1 فأن :

$$\pi(z) = (1-a)(1-az)^{-1}$$

٣

توزيعات الاحتمال المستمره

Contauous probability distributions

توجد أنواع كثيرة من توزيعات الأحتمال المستمرة وهى على جانب كبير من الأهمية فى المسائل العسكرية والشئون الصناعية وسنشرح فيما يلى توزيعات الأحتمال المستمرة الآتية :

١) التوزيع الطبيعى — The normal distribution

٢) التوزيع الأسى — The exponential distribution

٣) التوزيع المستطيلى — Rectangular distribution

٤) توزيع جاما — Gamma distribution

٥) توزيع بيتا — Beta distribution

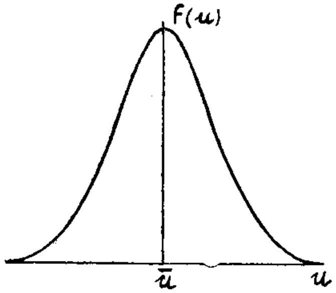
١) التوزيع الطبيعى — The normal distribution

يدخل التوزيع الطبيعى (ويسمى فى بعض الأحيان بتوزيع جاوس) فى كثير من المسائل العملية وله خاصية هامة وهى أنه اذا أخذت عينات بحجم معين من مجموعة ما فأن التوزيع الجديد المكون من متوسطات العينات يكون أقرب الى الطبيعى عن المجموعة الأصلية .

فى التوزيع الطبيعى :

$$f(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}$$

ومدى المتغير هو من : $u = -\infty$ إلى $u = +\infty$. ويشبه المنحنى $y = f(u)$ كما نعلم شكل الناقوس ويكون متماثلا حول المستقيم $u = \bar{u}$ ويكون محور u خطا تقاربيا له شكل (١) . نعتبر الآن .



شكل (١)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}\, du$$

بوضع : $z = \dfrac{u - \bar{u}}{\sqrt{2}\,\sigma}$ ينتج أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}\, du = \sqrt{2}\,\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= \sqrt{2}\,\sigma\,\sqrt{\pi} = \sigma\,\sqrt{2\pi}$$

لذلك ينتج أن :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}\, du = 1$$

كما يجب أن يكون ليتحقق شرط توزيع الاحتمال

يعطى المتوسط أو العزم الأول μ_1 من :

$$\mu_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}\, du$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u-\bar{u})\, e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}\, du$$

$$+ \bar{u}.\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}\, du$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times -\sigma^2 \left[e^{-\frac{(u-\bar{u})^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \bar{u} \times 1$$

$$= 0 + \bar{u} = \bar{u}$$

أى أن المتوسط يساوى $\bar{u}$

يعطى التباين من :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u-\bar{u})^2\, e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}\, du$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (u - \bar{u})^2 \; e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2} \, du$$

نضع :

$$z = \frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma^2}$$

$$\therefore \; dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sigma}{\sqrt{z}} \; dz$$

وينتج أن التباين يساوى :

$$\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} 2\sigma^2 \, z \; e^{-z} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sigma}{\sqrt{z}} \; dz$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}} \, e^{-z} \; dz$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \times \tfrac{1}{2} \, \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \times \tfrac{1}{2} \times \sqrt{\pi}$$

$$= \sigma^2$$

أى أن التباين يساوى σ^2

لذلك فى التوزيع الطبيعى :

$$f(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}$$

تكون $\bar{u}$ هى المتوسط ، σ هى الأنحراف المعيارى .

إحتمال وقوع قيمة المتغير u بين u_0 ، u_1 هو :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{u_0}^{u_1} e^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma^2}\, du$$

وبكتابة :

$$t = \frac{u-\bar{u}}{\sigma}, \; t_0 = \frac{u_0-\bar{u}}{\sigma}, \; t_1 = \frac{u_1-\bar{u}}{\sigma}$$

ينتج أن احتمال وقوع قيمة للمتغير t بين t_0 ، t_1 هو :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

وهذه هى الصورة القياسية للتكامل الطبيعى الذى فيه متوسط t يساوى صفرا والانحراف المعيارى يساوى 1

ولا يمكن حساب التكامل $\int_{0}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ باستعمال الدوال البسيطة —

ويعطى الجدول الآتى قيمة $\int_0^T e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ لقيم T المختلفة ويلاحظ أنه إذا كانت $T = \infty$ فأن :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0.5$$

T	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0.0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0.0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	0.1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	0.1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	0.1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	0.2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	0.2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	0.2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	0.3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	0.3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	0.3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	0.3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	0.4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	0.4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	0.4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1.6	0.4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	0.4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	0.4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	0.4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
2.0	0.4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	0.4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	0.4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	0.4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	0.4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	0.4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	0.4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	0.4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	0.4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2.9	0.4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	0.49865	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3.1	0.49903	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993

استنتاج التوزيع الطبيعي من توزيع ذي الحدين :

يمكن استنتاج التوزيع الطبيعي من توزيع ذي الحدين كما يأتي :

نفرض أن المتغير t يأخذ القيم 0 ، λ ، 2λ ، ...... ، $n\lambda$ باحتمالات تعطى من الحدود المتتالية في مفكوك $(\alpha + \beta)^n$ وتبعا لذلك :

$$\bar{u} = n \lambda \alpha \quad ,$$

$$\mu_2 = n \lambda^2 \alpha + n (n - 1) \lambda^2 \alpha^2$$

$$\sigma^2 = \mu_2 - \bar{u}^2$$

$$= n \lambda^2 \alpha + n (n - 1) \lambda^2 \alpha^2 - n^2 \lambda^2 \alpha^2$$

$$= n \lambda^2 \alpha - n \lambda^2 \alpha^2$$

$$= n \lambda^2 \alpha (1 - \alpha) = n \lambda^2 \alpha \beta$$

نفرض أن y هي احتمال حدوث $r\lambda$ وان y_1 هي احتمال حدوث $(r + 1) \lambda$ أي أن :

$$y = {}^nC_r \; \alpha^r \beta^{n-r} \quad ,$$

$$y_1 = {}^nC_{r+1} \; \alpha^{r+1} \beta^{n-r-1}$$

$$\frac{y_1 - y}{y} = \frac{y_1}{y} - 1$$

$$= \frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} \, \frac{\alpha}{\beta} - 1$$

$$= \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \cdot \frac{r!\,(n-r)!}{n!} \; \frac{\alpha}{\beta} - 1$$

$$= \frac{(n-r)\,\alpha}{(r+1)\,\beta} - 1 = \frac{n\,\alpha - r\,(\alpha+\beta) - \beta}{(r+1)\,\beta}$$

$$= \frac{n\,\alpha - r - \beta}{(r+1)\,\beta}$$

نضع $u = r\lambda - n\alpha\lambda$ وينتج أن :

$$\frac{y_1 - y}{y} = \frac{n\,\alpha\,\lambda - r\,\lambda - \beta\,\lambda}{r\,\beta\,\lambda + \beta\,\lambda} = \frac{-u - \beta\,\lambda}{\beta\,u + n\,\alpha\,\beta\,\lambda + \beta\,\lambda}$$

نفرض أن $\lambda = \delta u$ وأن $y_1 - y = \delta y$ وينتج أن :

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{(-u - \beta\,\lambda)\,\lambda}{\beta\,u\,\lambda + n\,\alpha\,\beta\lambda^2 + \beta\lambda^2}$$

$$= \frac{(-u - \beta\,\delta u)\,\delta u}{(u+\lambda)\,\beta\lambda + n\,\alpha\,\beta\,\lambda^2}$$

$$= \frac{-(u + \beta\,\delta u)\,\delta u}{(u + \delta u)\,\beta\,\delta u + \sigma^2}$$

عندما تقرب δu من الصفر فأن $\frac{\delta y}{\delta u}$ تقرب من $\frac{dy}{du}$ وينتج أن :

$$\frac{1}{y}\;\frac{dy}{du} = -\frac{u}{\sigma^2}$$

$$\therefore \int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{\sigma^2}\int u\,du$$

$$\therefore \quad y = A^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

ولتحقيق شرط توزيع الاحتمال يجب أن يكون :

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\, e^{-\frac{u^2}{2\pi^2}}\, du = 1$$

$$\therefore \quad A \times \sigma\sqrt{2\pi} = 1 \quad \text{i.e.} \quad A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

لذلك للتوزيع الطبيعى ينتج أن :

$$y = f(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

والمتوسط فى هذه الحالة يساوى صفرا ويلاحظ أن التوزيع الطبيعى مستنبط من توزيع ذى الحدين عندما تقرب n من ∞ . ولا توجد أى قيود فى هذه الحالة على قيمة α كما فى حالة توزيع بواسون.

وفيما يلى بعض الأمثلة على التوزيع الطبيعى وكيفية تطبيقه فى المسائل العملية .

مثال (١)

فى توزيع طبيعى فيه المتوسط يساوى 20 والانحراف المعيارى يساوى 5 أوجد إحتمال كل من الفترات :

١) 22 إلى 28

٢) 15 إلى 22

٣) 30 وأكثر

١) فى هذه الحالة :

$$t_0 = \frac{22-20}{5} = 0.4$$

$$t_1 = \frac{28-20}{5} = 1.6$$

احتمال الفترة 22 إلى 28 يساوى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{.4}^{1.6} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1.6} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= 0.4452 - 0.1554$$

$$= 0.2898$$

(باستعمال الجدول السابق)

٢) فى هذه الحالة :

$$t_0 = \frac{15-20}{5} = -1 \,,$$

$$t_1 = \frac{22-20}{5} = 0.4$$

احتمال الفترة 15 إلى 22 يساوى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{.4} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{.4} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{.4} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

[من التماثل : $\int_{-1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_{0}^{1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$]

$$= 0.3413 + 0.1554 = 0.4967$$

٣) فى هذه الحالة :

$$t_o = \frac{30 - 20}{5} = 2 \quad , \quad t_1 = \infty$$

احتمال 30 وأكثر يساوى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= 0.5000 - 0.4772 = 0.0228$$

مثال (٢)

تهتم بعض الكليات الحربية بأوزان الطلبة الذين يلتحقون بها . فأذا كان متوسط وزن 500 طالب فى كلية حربية هو 151 رطلا والانحراف المعيارى يساوى 15 رطلا فأذا خضعت أوزان الطلبة لتوزيع طبيعى أوجد عدد الطلبة الذين وزنهم :

١) يتراوح بين 120 ، 155 رطلا

٢) أكثر من 185 رطلا

٣) أقل من 128 رطلا

٤) 128 رطلا

٥) أقل من أو يساوى 128 رطلا

علما بأن الاوزان مقربة إلى أقرب رطل .

١) الاوزان التى تقع بين 120 ، 155 رطلا تأخذ فى الحقيقة أى قيمة بين 119.5 الى 155.5 ما دامت الأوزان مقربة لاقرب رطل

$$t_0 = \frac{119.5 - 151}{15} = -2.10$$

$$t_1 = \frac{155.5 - 151}{15} = 0.3$$

النسبة المطلوبة للطلبة هى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2.10}^{0.3} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2.10}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{0.3} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{2.10} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{0.3} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= 0.4821 + 0.1179 = 0.6000$$

لذلك يكون عدد الطلبة الذين يتراوح وزنهم بين 120 ، 155 يساوى :

$$500 \times 0.6 = 300$$

٢) الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185 رطلا يجب أن يكون وزنهم 185.5 رطلا على الأقل

$$t_0 = \frac{185.5 - 151}{15} = 2.3$$

$$t_1 = \infty$$

النسبة المطلوبة للطلبة هى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2.3}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_{0}^{2.3} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= 0.5000 - 0.4893 \doteq 0.0107$$

لذلك يكون عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185 رطلا يساوى :

$$500 \times 0.0107 = 5$$

٣) الطلبة الذين يقـل وزنهم عن 128 رطلا يجب أن يقـل وزنهم عن 127.5 رطلا

$$t_1 = \frac{127.5 - 151}{15} = -1.57$$

النسبة المطلوبة للطلبة هى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1.57} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.57}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(من التماثل)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1.57} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= 0.5000 - 0.4418 = 0.0582$$

لذلك يكون عدد الطلبة الذين يقل وزنهم عن 128 رطلا يساوى :

$$500 \times 0.0582 = 29$$

٤) الطلبة الذين وزنهم 128 رطلا يتراوح وزنهم بين 127.5 ، 128.5 رطـلا

$$t_0 = \frac{127.5 - 151}{15} = -1.57$$

$$t_1 = \frac{128.5 - 151}{15} = -1.5$$

النسبة المطلوبة للطلبة هى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.5}^{-1.57} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.5}^{1.57} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{(من التماثل)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1.57} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1.5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= 0.4418 - 0.4332 = 0.0086$$

لذلك يكون عدد الطلبة الذى وزنهم 128 رطلا يساوى :

$$500 \times 0.0086 = 4$$

٥) عدد الطلبة الذين وزنهم أقل من أو يساوى 128 رطلا يساوى :

$$29 + 4 = 133$$

ويمكن ايجاد هذه النتيجة مباشرة بدون استعمال النتيجتين السابقتين كما يأتى :

الطلبة الذين وزنهم أقل من أو يساوى 128 يجب أن يقل وزنهم عن 128.5 رطلا

$$t_1 = \frac{128.5 - 151}{15} = -1.5$$

النسبة المطلوبة للطلبة هى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1.5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.5}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \text{(من التماثل)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1.5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= 0.5000 - 0.4332 = 0.0668$$

لذلك يكون عدد الطلبة الذين وزنهم أقل من أو يساوى 128 رطلا يساوى :

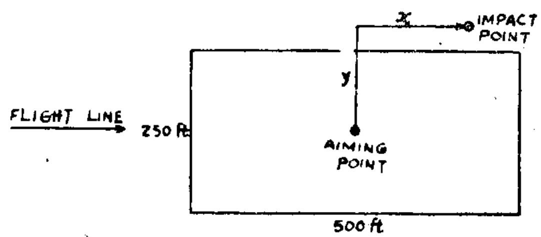
$$500 \times 0.0668 = 33$$

مثال (٣)

أرسلت مجموعة من قاذفات القنابل لالقاء قنابلها على مصنع هام على شكل مستطيل طوله 500 قدما وعرضه 250 قدما . ويمكن لقاذفات القنابل القاء 10 قنابل من ارتفاع كبير موجهة كلها نحو المركز الهندسى للمصنع سنفرض أن اتجاه سير القاذفات موازيا لطول المصنع وان انحراف نقطة التصادم عن النقطة

المقصوده يخضع للتوزيع الطبيعى فيه المتوسط يساوى صفرا والانحراف المعيارى يساوى 200 قدما فى كل بعد — وأن هذين الانحرافين متغيران عشوائيان مستقلان . احسب العدد المتوقع لاصابة المصنع بالقنابل .

نفرض أن الانحراف الأفقى يساوى x وأن الانحراف الرأسى يساوى y كما هو مبين فى شكل (٢) :



شكل (٢)

تحدث اصابة اذا وقع كل من الحدثين الآتيين :

$$-250 \leqslant x \leqslant 250$$

$$-125 \leqslant y \leqslant 125$$

وإلا لا تصيب القنبلة الهدف

بوضع :

$$u = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{x}{200} ,$$

$$v = \frac{y - \bar{y}}{\sigma} = \frac{y}{200}$$

فأن احتمال الاصابة عند القاء قنبلة واحده هو :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_0}^{u_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{v_0}^{v_1} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$u_0 = \frac{-250-0}{200} = -1.25$$

$$u_1 = \frac{-125-0}{200} = 1.25$$

$$v_0 = \frac{-125-0}{200} = -0.625$$

$$v_1 = \frac{125-0}{200} = 0.625$$

لذلك يكون احتمال اصابة المصنع عند القاء قنبلة واحدة يساوى :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.25}^{1\ 25} e^{-\frac{u^2}{2}} du \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0.625}^{0.625} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$= 4 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1.25} e^{-\frac{u^2}{2}} du \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{0.625} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right]$$

$$= 4 \times 0.3944 \times 0.2340 = 0.369$$

لذلك يكون عدد الاصابات المتوقعة للمصنع عند القاء 10 قنابل يساوى :

$$10 \times 0.369 = 3.69$$

٢ ـ توزيع الفترات الزمنية بين الأحداث ـ التوزيع الأسى :

Distribution of time-interval between incidents —
The exponential distribution.

اذا علمنا انه فى المتوسط تصل عربات عددها λ فى وحده الزمن ـ ما هو احتمال مرور زمن t بين عربات متتالية ؟ نقسم الزمن t الى عدد كبير n من الفترات الصغيرة δt ونظرا لأنه تصل عربات عددها λ فى وحدة الزمن فهناك احتمال وصول عربة واحده كل $\frac{1}{\lambda}$ من الزمن لذلك فأحتمال وصول عربه واحده فى كل فترة δt من الزمن يساوى $\frac{\delta t}{\frac{1}{\lambda}}$ أى $\lambda \, \delta t$ وفى كل فترة يوجد احتمال يساوى $1 - \lambda \, \delta t$ لعدم وصول أى عربه . ونحتاج الى معرفة احتمال عدم وجود أى عربة فى فترات متتالية عددها n ولكن توجد عربه واحده فى الفترة $n + 1$ ويكون الاحتمال المركب هو :

$$(1 - \lambda \, \delta t)^n \, \lambda \, \delta t \;=\; \delta p \quad \text{مثلا}$$

ونظرا لأن $t = n \, \delta t$ ينتج أن :

$$\frac{\delta p}{\delta t} = \lambda \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

فعند ماتقرب δt من الصفر ، n من مالا نهاية ينتج أن :

$$\frac{dp}{dt} = \lambda \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = \lambda e^{-\lambda t}$$

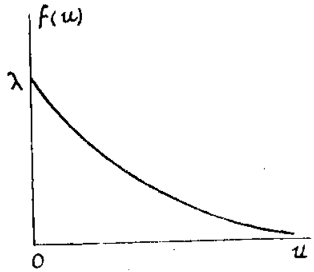
لذلك يعطى توزيع الاحتمال للزمن t بين العربات المتتالية من :

$$dp = \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

وهو توزيع مستمر تتغير فيه t من 0 إلى ∞ فيه كثافة الاحتمال تساوى $\lambda e^{-\lambda t}$ ويسمى التوزيع الأسى . لذلك فى التوزيع الأسى :

(شكل ٣)

$$f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$$



شكل (٣)

وواضح أن:

$$\int_0^\infty f(u)\, du = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u}\, du = -\left(e^{-\lambda u}\right)_0^\infty = 1$$

كما يجب أن يكون ليتحقق شرط توزيع الإحتمال

من التكامل : $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1$ أى $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$

بأخذ التفاضل تحت علامة التكامل بالنسبة إلى λ ينتج أن :

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda^2} ,$$

$$\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^3}$$

يعطى الزمن المتوسط بين العربات μ_1 من :

$$\mu_1 = \int_{0}^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

وهذا ما كنا نتوقعه لأنه إذا وصلت عربات عددها λ فى وحده الزمن — فأنه توجد فى المتوسط فترة زمنية $\frac{1}{\lambda}$ بين العربات وإذا أعطينا هذا الزمن المتوسط الرمز a فأن :

$$dp = \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} dt \qquad 0 < t < \infty$$

ويسمى بقانون بواسون لأحداث المرور .

وإذا استبدلنا الزمن t بالمسافة x فأن القانون السابق يمكن استعماله لبيان أن توزيع الاحتمال للمسافة المقطوعة بين التصادمات المتتالية لجزيء غاز هو

$$dp = \frac{1}{l} e^{-\frac{x}{l}} dx \qquad (0 < x < \infty)$$

حيث l هى المسار الحر المتوسط

يعطى التباين σ^2 للتوزيع الأسى من :

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

$$= \int_0^\infty t^2 e^{-\lambda t} \, dt - \mu_1^2$$

$$= \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال (٤)

اذا وقعت الانهيارات فى امداد القوى حسب التوزيع الأسى بمتوسط أنهيار واحد كل شهر — أوجد احتمال مرور فترة بين الانهيارات المتتالية :

١) أقل من أسبوع .

٢) بين 10 ، 11 اسبوعا .

واذا احتفظنا بهذه البيانات لمدة 5 سنوات أوجد العدد المتوقع للفترات التى تقل عن اسبوع .

(سنفرض هنا أن الشهر يساوى أربعة أسابيع فقط)

بأخذ الأسبوع وحده الزمن . ينتج أن $\lambda = \frac{1}{4}$

١) احتمال $t < 1$ هو :

$$\int_0^1 \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t} \, dt = 1 - e^{-\frac{1}{4}} = 0.22 \quad \text{تقريبا}$$

٢) احتمال وقوع t بين 10 ، 11 هو :

$$\int_{10}^{11} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t} dt = e^{-\frac{10}{4}} - e^{-\frac{11}{4}} = 0.018$$ تقريبا

فى 5 سنوات أى 65 شهرا (بفرض أن الشهر أربعة أسابيع) فأن عدد الانهيارات المتوقعة يساوى 65 بينها 64 فترة .

المدد المتوقع للفترات التى تقل عن أسبوع يساوى :

$$0.22 \times 64 = 14$$

٣) التوزيع المستطيل : Rectangular distribution.

فى هذا التوزيع :

مدى u : من 0 إلى a

كثافة الاحتمال :

$$f(u) = \frac{1}{a}$$

ويلاحظ أن :

$$\int_0^a f(u)\, du = \int_0^a \frac{1}{a}\, du = 1$$

كما يجب أن يكون ليتحقق شرط توزيع الاحتمال

يعطى المتوسط $\bar{u}$ من : .

$$\bar{u} = \mu_1 = \int_0^a u.\, f(u)\, du$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a u\, du = \frac{a}{2}$$

يعطى التباين σ^2 من :

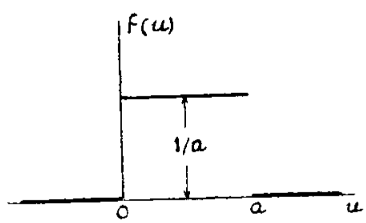
$$\sigma^2 = \mu_2 - \bar{u}^2$$

$$= \int_0^a u^2 .\, f(u)\, du - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a u^2\, du - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

ويبين شكل (٤) التوزيع المستطيلى



شكل (٤)

٤) **توزيع جاما :** Gamma distribution

فى هذا التوزيع :

مدى u من 0 إلى ∞

كثافة الأحتمال :
$$f(u) = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} u^{a} e^{-bu}$$

حيث b بارامتر موجب ، a بارامتر أكبر من 1 —

ويلاحظ أن :

$$\int_0^\infty f(u)\,du = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty u^{a} e^{-bu}\,du$$

بوضع $v = bu$ فأن $dv = bdu$ وينتج أن :

$$\int f(u)\,du = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \int \frac{v^{a}}{b^{a+1}} e^{-v}\,dv$$
$$= \frac{1}{\Gamma(a+1)} \Gamma(a+1) = 1$$

كما يجب أن يكون ليتحقق شرط توزيع الأحتمال

يعطى المتوسط $\bar{u}$ من :

$$\bar{u} = \mu_1 = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty u^{a+1} e^{-bu}\,du$$

وبأستعمال نفس التعويض السابق $v = bu$ ينتج أن :

$$\bar{u} = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty \frac{v^{a+1}}{b^{a+2}} e^{-v} dv$$

$$= \frac{1}{b} \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a+1)} = \frac{a+1}{b}$$

يعطى التباين σ^2 من :

$$\sigma^2 = \mu_2 - \bar{u}^2$$

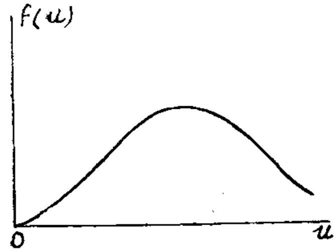
$$= \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty u^{a+2} e^{-bu} du - \frac{(a+1)^2}{b^2}$$

$$= \frac{1}{b^2} \frac{\Gamma(a+3)}{\Gamma(a+1)} - \frac{(a+1)^2}{b^2}$$

$$= \frac{(a+2)(a+1)}{b^2} - \frac{(a+1)^2}{b^2}$$

$$= \frac{a+1}{b^2}$$

ويبين شكل (٥) توزيع جاما



شكل (٥)

ويتفق توزيع جاما مع المشاهدات للقيم الموجبة التى تقع على مدى كبير معقول وهـــذا التوزيع ذو فائدة كبيرة فى تحليل المعلومات عن المبيعات الأسبوعية .

مثـال (٥)

تستمر شركة صناعة معادن 80 أسبوعا وتستهلك أسبوعيا كمية x من سبيكة من نوع معين ويعطى الجدول الآتى قيمة الاستهلاك x وعـــدد الأسابيع اللازمة للاستهلاك . أربط هذه البيانات بتوزيع جاما

x	عدد الأسابيع
0 — 99	3
100 — 199	3
200 — 299	6
300 — 399	14
400 — 499	13
500 — 599	15
600 — 699	11
700 — 799	9
800 — 899	2
900 — 999	4
	80

يعطى توزيع جاما من :

$$f(u) = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} u^{a} e^{-b u}$$

حيث b بارامتر موجب ، a بارامتر أكبر من 1 —

$$\bar{u} = \frac{a+1}{b} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{a+1}{b^2}$$

ومن التوزيع الموجود فى الجدول يمكن حساب المتوسط $\bar{u}$ والتباين σ^2
ونجد أن : $\bar{u} = 506.$ ، $\sigma^2 = 45200$

$$\therefore \frac{a+1}{b} = 506.$$

$$\frac{a+1}{b^2} = 45200$$

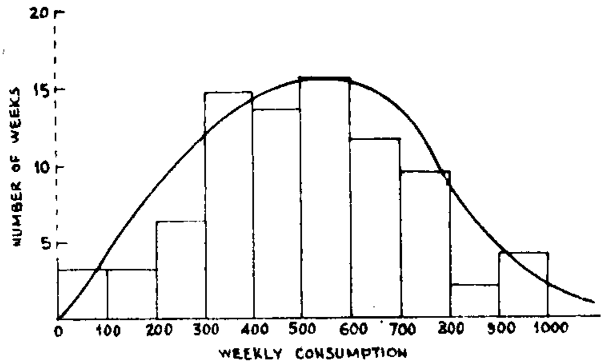
وبحل هاتين المعادلتين ينتج أن :

$$a = 4.57 \quad , \quad b = 0.011$$

وتعطى كثافة الإحتمال من :

$$f(u) = \frac{(0.011)^{5.57}}{\Gamma(5.57)} u^{4.57} e^{-0.011 u}$$

ويبين شكل (٦) توفيق البيانات المعطاة بتوزيع جاما



شكل (٦)

•) توزيع بيتا Beta distribution

فى هذا التوزيع :

مدى u من 0 إلى 1

كثافة الأحتمال :

$$f(u) = \frac{1}{\beta\left\{(a+1),(b+1)\right\}}\ u^{a}(1-u)^{b}$$

حيث كل من a ، b بارامتر أكبر من 1 —

ويلاحظ أن :

$$\int_0^1 f(u)\,du = \frac{1}{\beta\left\{(a+1),(b+1)\right\}}\int_0^1 u^{a}(1-u)^{b}\,du$$

$$= \frac{1}{\beta\left\{(a+1),(b+1)\right\}}\ \beta\left\{(a+1),(b+1)\right\} = 1$$

كما يجب أن يكون ليتحقق شرط توزيع الأحتمال

يعطى المتوسط $\bar{u}$ من :

$$\bar{u} = \mu_1 = \frac{1}{\beta\{(a+1),(b+1)\}} \int_0^1 u^{a+1} (1-u)^b du$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+2)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)} \beta \{(a+2), (b+1)\}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b+2)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)} \quad \frac{\Gamma(a+2)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+3)}$$

$$= \frac{a+1}{a+b+2}$$

يعطى التباين σ^2 من :

$$\sigma^2 = \mu_2 - \bar{u}^2$$

$$= \frac{1}{\beta\{(a+1),(b+1)\}} \int_0^1 u^{a+2} (1-u)^b du$$

$$- \left(\frac{a+1}{a+b+2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{\beta\{(a+1),(b+1)\}} \beta\{(a+3),(b+1)\}$$

$$-\left(\frac{a+1}{a+b+2}\right)^2$$

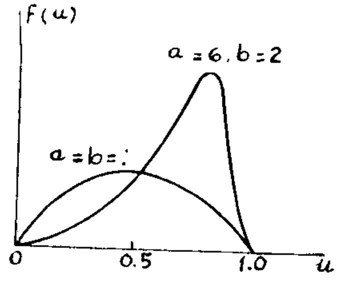
$$=\frac{\Gamma(a+b+2)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}\;\frac{\Gamma(a+3)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+4)}$$

$$-\left(\frac{a+1}{a+b+2}\right)^2$$

$$=\frac{(a+2)\,(a+1)}{(a+b+3)\,(a+b+2)}-\left(\frac{a+1}{a+b+2}\right)^2$$

$$=\frac{(a+1)\,(b+1)}{(a+b+2)^2\,(a+b+3)}$$

ويبين شكل (٧) توزيع β فى الحالتين التى فيهما $a = b = 1$ ، $a = 6,\ b = 2$



شكل (٧)

ويستعمل توزيع بيتا عادة عندما يكون المتغير العشوائى u نسبه

جمع المتغيرات العشوائية – المجموع التركيبى والتكاملات التركيبية .

The addition of random variables — convolutions

نفرض أن x ، y متغيران عشوائيان مستقلان بمعنى أن قيمة x فى أى محاولة لا تعتمد بأى حال من الاحوال على قيمة y فى أى محاولة . لذلك تكون z حيث $z = x + y$ متغير عشوائى . والمطلوب تعيين دالة توزيع z اذا علمنا دالة توزيع كل من x ، y وسنحل هذه المسألة فى الحالتين الآتيتين :

١) x ، y متغيران يأخذا قيما صحيحة موجبة

٢) x ، y متغيران يأخذا قيما موجبة مستمرة

١ — نعتبر أولا حالة التوزيع المنفصل ونفرض أن

$$P(x = m) = p_n \;,\; P(y = n) = q_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ونظرا لأن كل من x ، y مستقل عن الآخر فأن :

$$P(z = n) = \sum_{r=0}^{n} P(x = r)\, P(y = n - r) \,,$$

لذلك إذا كان $(c_0 , c_1 , c_2 , \ldots)$ هو توزيع كثافة الاحتمال للمتغير z أى $c_n = P(z = n)$ فأن :

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} p_r \; q_{n-r} = \sum_{s=0}^{n} p_{n-s} \; q_s$$

فلدالة التوزيع ينتج أن :

$$P(z \leqslant n) = \sum_{s=0}^{n} c_s = \sum_{s=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} p_r \; q_{n-r}$$

ويكون من المناسب فى بعض الاحيان كتابة c_n على الصورة :

$$c_n = \sum_{r=0}^{\infty} p_r \; q_{n-r} = \sum_{s=0}^{\infty} p_{n-s} \; q_s$$

حيث :

$$p_k = q_k = 0 \text{ for } k < 0$$

٢) فى حالة التوزيع المستمر نفرض أن دوال توزيع الأحتمال لكل من x ، y ، z هى على الترتيب $f(u)$ ، $g(u)$ ، $h(u)$ والمطلوب ايجاد $h(u)$ بدلالة $f(u)$ ، $g(u)$. نأخذ قيمة ثابتة فى y فى الفترة $(v, v+dv)$

فأذا كان : $w < z < w + dw$ فأن : $w - v < x < w - v + dw$

ولكن :

$$P(w - v < x < w - v + dw) = f(w - v)\, dw ,$$

$$P(v < y < v + dv) = g(v)\, dv$$

لذلك بأعتبار أن y يمكن أن تأخـــذ أى قيمة فى الفترة $(0 , w)$ فأنه حسب نظرية الاحتمال الكلى :

$$h(w)\, dw = P(w < z < w + dw)$$

$$= dw \int_0^w f(w - v)\, g(v)\, dv$$

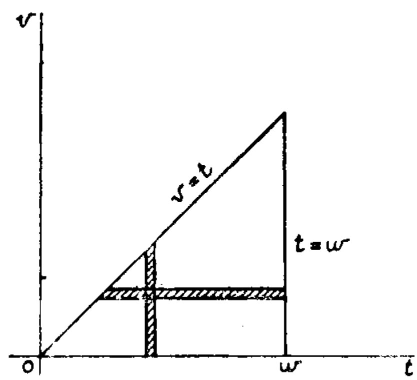
ويمكن الحصول على نتيجة مشابهة اذا أعتبرنا أولا أن x ثابتة بدلا من y . لذلك تكون النتيجة النهائية لكثافة الاحتمال h (w) المتغير z هى

$$h(w) = \int_0^w f(w - v)\, g(v)\, dv = \int_0^w g(w - u)\, f(u)\, du$$

ويمكن تحويل هذه النتيجة بسهولة الى أخرى تربط دوال التوزيع F (u) ، G (u) ، H (u) للمتغيرات x ، y ، z كما يأتى :

$$H(w) = \int_0^w h(t)\, dt = \int_0^w \int_0^t f(t - v)\, g(v)\, dv\, dt$$

وبتغيير ترتيب التكامل علما بأن التكامل الثنائى محسوب على المثلث المحدود بالمستقيمات u = 0 ، v = t ، t = w (شكل ٨) نحصل على :



شكل (٨)

$$H(w) = \int_0^w g(v)\,dv \int_v^w f(t-v)\,dt$$

$$= \int_0^w g(v)\,dv \int_0^{w-v} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^w F(w-v)\,g(v)\,dv$$

ويمكن بنفس الطريقة أثبات أن :

$$H(w) = \int_0^w G(w-u)\,f(u)\,du$$

ويلاحظ القارىء انه فى كثير من مسائل الاحتمال تحتوى كل من $h(w)$ ، $H(w)$ على تكاملات مأخوذه على مدى لانهائى ويظهر ذلك فى الحالة التى تعرف فيها x ، y فى الفترة $(-\infty, \infty)$ وفى هذه الحالة عند استنتاج قانون من $h(w)$ فأنه من الضرورى ملاحظة ان y يمكن أن تأخذ أى قيمة فى الفترة $(-\infty, \infty)$ بدلا من الفترة $(0, w)$ كما سبق عندما تكون $z = x + y$ ومن الممكن أن يكون $w < z < w + dw$ مع $x \to \infty$ ، $y \to -\infty$ ؟ مع $x \to -\infty$ ، $y \to \infty$ لذلك ينتج أن :

$$h(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w-v)\,g(v)\,dv$$

وفى الحالة الخاصة عندما تـكون $f(x) = g(x) = 0$ اقيم $x < 0$ فأننا نحصل على المعادلات السابقه . ويمـكن اثبات أيضا أن :

$$H(w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w - v)\, g(v)\, dv$$

وفى حالة المـدى $(-\infty, \infty)$ لـكل من x ، y ، z فأن $F(u)$ هى تـكامل $f(u)$ فى المدى $(-\infty, u)$.

وسنبين الآن فـكرة المجمـوع التركيبي والتكاملات التركيبية .

١) فى حالة التوزيع المنفصل : نفرض ان $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$ هى المتتابعات:

$$\{a\} = \{a_0, a_1, \ldots\}, \quad \{b\} = \{b_0, b_1, \ldots\},$$

$$\{c\} = \{c_0, c_1, \ldots\}$$

يقال أن $\{c\}$ هى المجموع التركيبي لـكل من $\{a\}$ ، $\{b\}$ اذا كان :

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} a_r\, b_{n-r}$$

ويلاحظ أنه اذا كان :

$$A(u) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r, \quad B(u) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r u^r,$$

$$C(u) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r u^r$$

فأن :

$$C(u) = A(u)\, B(u)$$

نفرض الآن أن $A(u)$ ، $B(u)$ هما الدالتين المولدتين للأحتمال للمتغيرين العشوائيين x ، y فنظرا لأن $\{C\}$ هى دالة كثافة الاحتمال للمتغير $x+y$ فأنه ينتج أن الدالة المولدة له هى $A(u)\, B(u)$ وتسمى هذه النتيجة بنظرية تركيب المجموع convolution theorem . وبتكرار تطبيق النظرية ينتج أنه إذا كانت S_N حيث :

$$S_N = x_1 + x_2 + \dots \dots + x_N$$

هى مجموع N (N ثابتة) من المتغيرات العشوائية المستقلة لكل منها نفس الدالة المولدة $A(u)$ فأن الدالة المولدة للأحتمال S_N هى $\{A(x)\}^N$

وعلى سبيل المثال فى توزيع بواسون حيث :

$$\Gamma(x = n) = a_n = \lambda^n e^{-n} / n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

فأن $N(x) = e^{\lambda(x-1)}$ لذلك إذا كانت :

$$S_N = x_1 + x_2 + \dots \dots + x_N$$

حيث تخضع x_r لتوزيع بواسون بپارامتر λ_r فأن الدالة المولدة للأحتمال S_N هى :

$$e^{\lambda_1 (x-1)}\, e^{\lambda_2 (x-1)} \dots \dots e^{\lambda_n (x-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots \dots + \lambda_N)(x-1)}$$

أى $e^{\mu(x-1)}$ حيث : $\mu = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$

لذلك فمجموع أى عدد من توزيعات بواسون هو أيضا توزيع بواسون .

٢) فى حالة التوزيع المستمر — نفرض أن $f(u)$ ، $g(u)$ ، $h(u)$ ثلاثة دوال معرفة فى الفترة $(0, \infty)$ بحيث يكون

$$h(u) = \int_0^u f(u-v)\, g(v)\, dv$$

تسمى $h(u)$ التكامل التركيبى convolution للدالتين $f(u)$ ، $g(u)$.

ومن الواضح أنه فى الحالة الخاصة التى فيها كل من $f(u)$ ، $g(u)$ دالة كثافة احتمال للمتغيرين العشوائيين x ، y فأن $h(u)$ هى دالة كثافة الأحتمال للمتغير العشوائى $x+y$.

على سبيل المثال نفرض أن x_1 ، x_2 ، … … ، x_n تخضع كلها لنفس توزيع أسى بدالة كثافة احتمال $f(u)$ حيث $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ ونفرض أن $f_N(u)$ هى دالة كثافة الاحتمال للمتغير S_N حيث :

$$S_N = x_1 + x_2 + \dots \dots + x_N$$

فمن الواضح ان :

$$f_N(v) = \int_0^v f_{N-1}(v-u)\, f(u)\, du$$

ولإيجاد هذا التكامل نتبع الخطوات الآتية :

$$f_2(v) = \int_0^v f_1(v-u)\, f(u)\, du$$

$$= \int_0^v \lambda e^{-\lambda (v-u)} \lambda e^{-\lambda u} du$$

$$= \int_0^v \lambda^2 e^{-\lambda v} du$$

$$= \lambda^2 v e^{-\lambda v}$$

$$f_3(v) = \int_0^v f_2(v-u)\quad f(u)\, du$$

$$= \int_0^v \lambda^2 (v-u)\, e^{-\lambda (v-u)} \lambda e^{-\lambda u} du$$

$$= \lambda^3 \int_0^v (v-u)\, e^{-\lambda v} du$$

$$= \lambda^3 v^2 e^{-\lambda v} / 2!$$

وبالمثل نجد أن :

$$f_4(v) = \int_0^v f_3(v-u)\, f(u)\, du$$

$$= \int_0^v \lambda^3 (v-u)^2 e^{-\lambda(v-u)} \lambda e^{-\lambda u} du$$

$$= \lambda^4 \int_0^v (v-u)^2 e^{-\lambda v} du$$

$$= \lambda^4 v^3 e^{-\lambda v} / 3!$$

وهكذا ... وينتج أن :

$$f_N(v) = \lambda^N v^{N-1} e^{-\lambda v} / (N-1)!$$

يأخذ متوسط S_N القيمه $\frac{N}{\lambda}$ ومن المعتاد كتابه $\lambda = \mu N$

لذلك يكون متوسط التوزيع الذى كثافته $\phi(u)$ حيث

$$\phi(u) = \frac{(\mu N)^N u^{N-1} e^{-\mu N u}}{(N-1)!}$$

هو $\frac{1}{\mu}$ ويسمى هذا التوزيع بتوزيع أرلنج (Erlang) ويرمز له بالرمز E_N وهو توزيع مجموع N من التوزيعات الآسية بنفس البارامتر وهو مهم جدا فى نظرية الطوابير التى سنشرحها فى الجزء الثانى .

تحويل لابلاس لتوزيع الاحتمال :

The Laplace transform of a probability distribution.

نفرض أن دالة التوزيع للمتغير العشوائى x هى F(u) . يعرف تحويل لابلاس للدالة F(u) بأنه f*(s) حيث

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} \, dF(u)$$

وفى حالة المتغير المستمر حيث توجد دالة كثافة f(x) بحيث يكون $f(u) = \frac{dF}{du}$ فإن تحويل لابلاس يأخذ الصورة المعتادة :

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u) \, du$$

وفى حالة المتغير المنفصل x حيث :

$$P(x = n) = p_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

فأن :

$$f^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-sn}$$

ويلاحظ أنه فى كلتا الحالتين $f^*(s) = E(e^{-su})$

وبفك e^{-sn} فى قوى sn فأنه يمكن كتابة $f^*(s)$ بدلالة العزوم μ_r للمتغير x (سواء أكان مستمراً أو منفصلا) على الصورة :

$$f^*(s) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \mu_r s^r / r!$$

وهذه نتيجة هامة لأنه إذا كانت $f^*(u)$ معلومة ، $f(u)$ غير معلومة فأنه يمكن إيجاد عزوم x بفك $f^*(s)$ فى قوى s التصاعدية ومساواة معاملات s^r فى الطرفين . ونحتاج الى إستعمال هذه الطريقة فى نظرية الطوابير .

وفيما يلى خاصتين هامتين لتحويل لابلاس

١) تعطى الدالة المولدة للأحتمال $\pi(z)$ المتغير المنفصل x من :

$$\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = E(z^n)$$

ويمكن إيجاد علاقة هذه الدالة بتحويل لابلاس بوضع $z=e^{-s}$ وينتج أن:

$$\pi(e^{-s}) = E(e^{-sn}) = f^*(s)$$

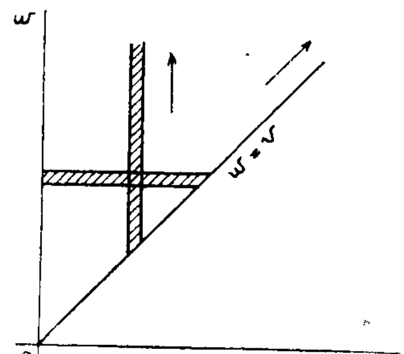
٢) نعتبر تحويل لابلاس للتكامل التركيبي $h(w)$ لدالتى الكثافة $f(u)$ ، $g(u)$ المتغيرين العشوائيين x ، y

$$h(w) = \int_0^w f(w - v)\, g(v)\, dv$$

$$h^*(s) = \int_0^\infty e^{-sw} h(w)\, dw$$

$$= \int_0^\infty e^{-sw} \left\{ \int_0^w f(w - v)\, g(v)\, dv \right\} dw$$

وبتغيير ترتيب التكامل كما هو مبين فى شكل (٩) ينتج أن :



شكل (٩)

$$h^*(s) = \int_0^\infty g(v)\, dv \int_v^\infty e^{-sw} f(w - v)\, dw$$

وبوضع $w = u + v$ ينتج أن :

$$h^*(s) = \int_0^{\infty} g(v)\, dv \int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u)\, du$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-su} f(u)\, du \times \int_0^{\infty} e^{-sv} g(v)\, dv$$

$$= f^*(s).\ g^*(s)$$

لذلك يكون تحويل لابلاس للتكامل التركيبي للدالتين $f(u)$ ، $g(u)$ هـو حاصل ضرب تحويلى لابلاس للدالتين $f(u)$ ، $g(u)$

سنختتم هذا الباب بمثالين متنوعين

مثـال (٦)

يرغب محل تجارى كبير فى طلب نوع معين من الهدايا لبيعها فى عيد الأسرة وعلى ضوء الخبرة السابقة يرى أصحاب المحل أن الطلب v لهذا النوع من الهدايا يمكن تقريبا تمثيله بدالة الكثافة $f(v)$ أى أن $f(v)\,dv$ هى احتمال وقوع الطلب بين v ، $v + dv$ فكل هدية طلبت وبيعت فأن مكسب المحل هو a قرشا ولكل هدية طلبت ولم تباع فأن خسارة المحل هى b قرشا — أوجد عدد الهدايا التى يجب أن يطلبها المحل حتى يكون الربح المتوقع أكبر ما يمكن .

نفرض أن x هى عدد الهدايا التى طلبت

الربح الفعلى R متغير عشوائى ، يكون دالة لكل من المتغير العشوائى v والمتغير x .

يعطى الربح المتوقع $E(R)$ لقيمة معينة فى x من :

$$E(R) = \int_0^\infty R(v, x)\, f(v)\, dv$$

وحسب شروط المسألة تأخذ الدالة $R(v, x)$ الصورة :

$$R(v, x) = av - b(x - v) \qquad \text{for } v < x$$

$$R(v, x) = ax \qquad \text{for } v \geq x$$

لذلك :

$$E(R) = \int_0^x \{av - b(x - v)\}\, f(v)\, dv + \int_x^\infty ax\, f(v)\, dv$$

ونجعل $E(R)$ أكبر ما يمكن بأخذ التفاضل تحت علامة التكامل بالنسبة إلى x المعادلة السابقة ومساواته بالصفر وينتج أن :

$$0 = -b \int_0^x f(v)\, dv + a \int_x^\infty f(v)\, dv$$

وإذا فرضنا أن : $U(v) = \int_0^v f(t)\, dt$ فأنه يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة :

$$- b\, U(x) + a\,[1 - U(x)] = 0$$

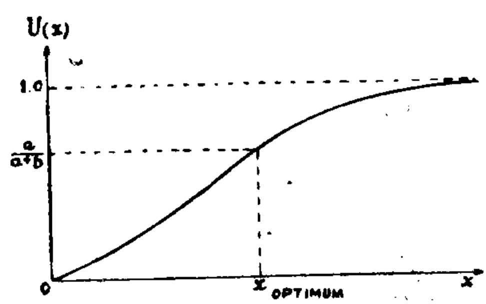
أى :

$$U(x) = \frac{a}{a+b}$$

لذلك يعطى عدد الهدايا x الذى يجب طلبه حتى يكون الربح المتوقع أكبر ما يمكن من المعادلة :

$$\int_0^x f(v)\, dv = \frac{a}{a+b}$$

ويمكن حل هذه المعادلة بالرسم كما هو مبين فى شكل (١٠)



شكل (١٠)

مثال (٧)

يرغب صاحب مصنع فى انتاج قطع لجهاز معين طولها 20 قدما وفى بعض الأحيان لا يكون طول القطعة 20 قدما بالضبط بل قد تزيد أو تقل بعض المواد فى النهايتين فأذا كان طول القطعة أكبر من 20 قدما فأنه يمكن بيع

القطعة أما اذا قل طول القطعة عن 20 قدما فأنه لايمكن بيع القطعة وتعتبر خردة . لذلك يجب ضغط القطعة فى النهايتين حتى يكون طول القطعة 20 قدما بالضبط ولا تقل عن ذلك فأذا فرض أن الطول المضغوط يمكن ضغطه تماما وأن النهاية الزائدة التى تعتبر خردة لكل قطعة هى متغير عشوائى y كثافته f (y) وأن تكاليف عملية الضغط لكل قدم تساوى C قرشا ـ أوجد أنسب طول مضغوط يمكن حتى تكون تكلفة عملية الضغط لكل قطعة مباعة أصغر ما يمكن .

نفرض أن $x + 20$ قدما يساوى الطول المضغوط

تكاليف عملية الضغط تساوى $C\,(20 + x)$

أحتمال بيع القطعة يساوى $P\,\{\, y \leqslant x \,\}$ أى $\int_0^x f(y)\,dy$

لذلك تكون تكلفة عملية الضغط لكل قطعة مباعة يساوى

$$\frac{C\,(20 + x)}{\int_0^x f(y)\,dy}$$

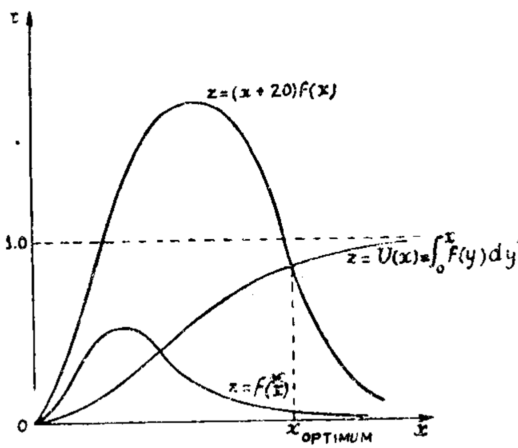
ولكى تكون هذه التكلفة أقل ما يمكن يجب أن يكون معاملها التفاضلى بالنسبة الى x يساوى صفرا أى أن :

$$\int_0^x f(y)\,dy - (x + 20)\,f(x) = 0$$

لذلك تعطى أنسب قيمة المتغير x من :

$$(x + 20)\ f(x) = \int_0^x f(y)\ dy$$

ويبين شكل (١١) كيفية حل هذه المعادلة بالرسم .



شكل (١١)

٤

نظرية البحث

Theory of Search

مقـدمة :

يحتوى جزء كبير من التحليـل التاكتيكى على المبادىء الأساسية لنظـرية البحث . ومن الصعب أخـذ فكرة كاملة عن جميـع أنواع المسائل العسكرية التى تحتاج لهذه النظرية والطرق المختلفة لحلها لأن معظم الابحاث فى هذا المجال يقـوم بها رجال بحوث العمليات العسكريين ومن النادر نشر نتيجة ابحاثهم الا فى الحدود المسموح بها ومن أهم النظريات فى هذا الموضوع هى نظرية المسار الحر المتوسط

نظرية المسار الحر المتوسط : Mean free path theorem

نفرض أنه يوجد هدف حيثما اتفق* (أى عشوائيا) فى مساحة A وقـد يكون الهدف غواصة للعدو نريد تحديد مكانها أو موقع للعـــدو نريد تدميره بالقاء القنابل عليه . ولتحقيق هذا الغرض يجب الاستعانه بمعـدات البحث وهى قد تكون دورية من الطائرات فى الحالة الأولى وقنابل أو دانات فى الحالة الثانية. ولـكل من هذه المعدات مدى تأثير فعال ضد الهدف فمثـلا للطائرة الدورية مدى رؤية فعال وللقنبلة أو الدانة نصف قطر مميت (lethal).

فبعد مرور زمن معين فأن إحدى معدات البحث أو أكثر تكشف أو تغطى (cover) جزء من المساحة A ويسمى هـــذا الجزء من المساحة التى تم كشفها بالمساحة المغطاه (covered area) فأذا وقـع الهدف داخل هذه المساحة المغطاه فأنه يكتشف أو يخرب مرة واحـــدة على الأقـل . وسنفرض أن هـــذه

المساحة المغطاه تتوزع توزيعا عشوائيا داخل المساحة A . وقد يوجد بعض التداخل (overlap) وقد يغطى هذا الجزء من المساحة A أكثر من مره ولكننا سنفرض حدوث ذلك بطريقة عشوائية . فمثلا اذا كانت احدى معدات البحث هى طائره دورية فأن المساحة المغطاه تساوى ضعف مدى الرؤية الفعال مضروبا فى سرعة الطائره مضروبا فى الزمن الذى يمضى فى البحث فى المساحة A. وفى حالة الدانة فأن المساحة المغطاه تساوى عدد الدانات التى اطلقت داخل A مضروبة فى المساحة المميته للدانة للهدف المقصود .

تعطى نظرية المنار الحر المتوسط احتمال النجاح كدالة للنسبة بين المساحة المغطاة والمساحة الكلية A . ولأيجاد قيمة هذا الاحتمال نعتبر الحالة فى اللحظة التى تكون فيها قيمة المساحة المغطاه مقسومة على المساحة الكلية A تساوى ϕ (تسمى ϕ بمعامل التغطية coverege factor) .

نفرض أن $P(m,\phi)$ هى احتمال اكتشاف أو تدمير الهدف m من المرات ، نعطى زياده صغيره المساحة المغطاه تساوى $d\phi$ فأذا وقعت هذه المساحه الصغيرة الأضافية حيثما اتفق (أى عشوائيا) داخل المساحة A فأن أحتمال اكتشاف أو تدمير الهدف ثانية فى هذه المساحة الجديدة المغطاة يساوى $d\phi$ وينتج أن :

$$P(m, \phi + d\phi) = (1 - d\phi)\, P(m, \phi) + d\phi\, P(m - 1, \phi)$$

وبطرح $P(m, \phi)$ من كلا الطرفين والقسمة على $d\phi$ ينتج أن

$$\frac{P(m, \phi + d\phi) - P(m, \phi)}{d\phi} + P(m, \phi) = P(m - 1, \phi)$$

وبأخذ النهاية عندما تقرب $d\phi$ من الصفر ينتج أن :

$$\frac{d\,P(m,\phi)}{d\phi} + P(m,\phi) = P(m-1,\phi)$$

وحل معادلة الفروق التفاضلية هذه لتحقق الشرط الابتدائى وهو احتمال عدم النجاح يساوى 1 عندما تكون المساحة المغطاه تساوى صفرا يعطى من :

$$P(m,\phi) = \phi^m e^{-\phi}/m!$$

ويمكن الحصول على هذا الحل بطريقة رياضية بسيطة كما يأتى :

عند $m = 0$ فأن معادلة الفروق التفاضلية تؤول إلى :

$$\frac{d\,P(0,\phi)}{d\phi} + P(0,\phi) = 0$$

وهى معادلة تفاضليه خطية من الرتبة الأولى يعطى حلها من :

$$e^{\phi}\,P(0,\phi) = c_0$$

$$P(0,\phi) = c_0\,e^{-\phi}$$

ولكن $P(0,0)$ هو احتمال عدم النجاح عندما تكون المساحة المغطاه تساوى صفرا وهو يساوى 1 لذلك ينتج أن : $c_0 = 1$ وتبعا لذلك :

$$P(0,\phi) = e^{-\phi}$$

عند $m = 1$ فأن معادلة الفروق التفاضلية تؤول الى :

$$\frac{d\,P(1, \phi)}{d\phi} + P(1, \phi) = e^{-\phi}$$

وهى معادلة تفاضليه خطيه من الرتبه الأولى يعطى حلها من :

$$e^{\phi}\, P(1, \phi) = \int e^{-\phi} \cdot e^{\phi}\, d\phi + c_1$$

$$= \phi + c_1$$

وواضح أنه عند $\phi = 0$ فأن $P(1, \phi) = 0$ ، ينتج أن $c_1 = 0$

$$\therefore \quad P(1, \phi) = \phi\, e^{-\phi}$$

كذلك عند $m = 2$ ينتج أن :

$$\frac{d\,P(2, \phi)}{d\phi} + P(2, \phi) = \phi\, e^{-\phi}$$

ويعطى حل هذه المعادلة التفاضليه الخطيه من :

$$e^{\phi}\, P(2, \phi) = \int \phi\, e^{-\phi} \cdot e^{\phi}\, d\phi + c_2$$

$$= \frac{\phi^2}{2!}$$

($c_2 = 0$ كما سبق)

$$\therefore \quad P(2, \phi) = \frac{\phi^2}{2!}\, e^{-\phi}$$

وبالمثل ينتج أن :

$$P(3, \phi) = \frac{\phi^3}{3!} e^{-\phi}, \; \dots \dots$$

وبوجه عام :

$$P(m, \phi) = \phi^m e^{-\phi} / m!$$

وتبعا لذلك يكون احتمال عدم اكتشاف أو تدمير الهدف هو :

$$P(0, \phi) = e^{-\phi}$$

احتمال اكتشاف أو تدمير الهدف مرة واحدة على الأقل يساوى :

$$1 - P(0, \phi) = 1 - e^{-\phi}$$

أو بطريقة أخرى يساوى :

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(m, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi^m e^{-\phi} / m!$$

$$= e^{-\phi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi^m}{m!}$$

$$= e^{-\phi} (e^{\phi} - 1)$$

$$= 1 - e^{-\phi}$$

$P(m, \phi)$ ما هى إلا توزيع إحتمال بواسون للحصول على مرات نجـــاح عددها m عندما يـكون العدد المتوقع للنجاح يساوى ϕ .

وسنذكر فيما يلى بعض التطبيقات العسكرية .

اغراق السفن التجارية : merchant vessel sinkings

نفرض أنه يمكن لسفينة تجارية القيام بعدد $2\frac{1}{2}$ رحلة فى المتوسط عبر المحيط قبل أن تراها غواصة للعدو - ونفرض أنه فى المتوسط أن كل سفينة من 4 سفن تراها الغواصة يمكن إصابتها بالطوربيد . المسار الحر المتوسط للسفينة قبل أن تصاب بالطوربيد يساوى $10 = \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ رحلة عبر المحيط والعدد المتوقع للاصابات فى رحلات عددها n يساوى $\frac{n}{10}$. فى هذه الحالة بدلا من تغطيه مساحة فأنه يغطى خط (هو المسافة المغطاة بالسفينة) ويكون معامل التغطية ϕ فى هذه الحالة هو النسبة بين عدد الرحلات والمسار الحر أى $\frac{n}{10}$ لذلك فاحتمال قيام السفينة بعدد n من الرحلات دون أن تخرب هو $P(0, \phi)$ حيث $\phi = \frac{n}{10}$ أى :

$$P\left(0, \frac{n}{10}\right) = e^{-\frac{n}{10}}$$

ضرب المساحات بالقنابل : Area bombardment

نفرض أنه يوجد مدفع مورتار فى مكان ما فى المساحة A ونعتبر أن المورتار يصاب بدانة إذا وقع داخل دائرة مساحتها a مركزها نقطة تصادم الدانة . فأذا أطلقت عدد n من الدانات عشوائيا فى المساحة A فأن فرصة عدم إصابة المورتار هى $e^{-\phi}$ حيث : $\phi = \frac{na}{A}$

إحتمال إصابة المورتار m من المرات هو :

$$P(m, \phi) = \phi^{m} e^{-\phi}/m!$$

نفرض الآن أن احتمال تخريب الأصابة المورتار بحيث لا يمكن اصلاحه يساوى p لذلك يكون احتمال اصلاح المورتار بعد m من الأصابات هو $(1-p)^m$ لذلك فأحتمال اصابة المورتار m من المرات ومع ذلك يمكن اصلاحه يساوى :

$$(1-p)^m \, \phi^m \, e^{-\phi} / m!$$

ولكن احتمال تخريب المورتار بحيث لا يمكن اصلاحه يساوى :

١ — احتمال اصلاح المورتار بعد جميع عدد الأصابات الممكنة

$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m \, \phi^m \, e^{-\phi} / m!$$

$$= 1 - e^{-\phi} \sum_{m=0}^{\infty} \{(1-p)\,\phi\}^m / m!$$

$$= 1 - e^{-\phi} \cdot e^{(1-p)\phi}$$

$$= 1 - e^{-p\phi}$$

حيث $\phi = \dfrac{n\,a}{A}$

لذلك يمكن التعبير عن احتمال التخريب التام بدلالة معامل تغطية جديدة ϕ_1 مثلا حيث $\phi_1 = \dfrac{p\,n\,a}{A}$ وهذا يوضح أنه فى هذه الحالة وفى حالات أخرى مماثلة فأن معامل التغطية للتخريب التام يمكن الحصول عليه من معامل

التغطية لأصابه بالضرب فى احتمال الأصابة التى تحــدث تخريبا تاما وهذه الخاصية البسيطة لمعامل التغطية ϕ تتفق مع توزيع بواسون .

السفن التى تراها وتغرقها الغواصات :

Ships sighted and sunk by submarines.

سنشرح الآن كيفية المقارنة بين تأثير الغواصات التى تعمل مستقلة والتى تعمل متحدة فى مجموعة مع بعضها . نفرض أن غواصات عددها N تسير فى دورية وتعمل متحدة فى ممر مائى معين عرضه W ونفرض أن لكل غواصة مدى رؤيا مؤثر يساوى r فحسب التحليل الرياضى السابق فأن متوسط عدد السفن S التى يمكن رؤيتها بغواصة أو أكثر فى الشهر يعطى من :

$$S = F(1 - e^{-\phi})$$

حيث F هى عدد السفن التي تسير فى الممر المائي كل شهر ، $\phi = \frac{2rN}{W}$

$$\therefore \quad S = F\left(1 - e^{-\frac{2rN}{W}}\right)$$

يتضح أنه كلما زاد عدد الغواصات ينتج حتما تأثير تشبعى لأن الغواصات الاضافية ترى دائما سفن سبق رؤيتها بغواصات أخرى لذلك لانحتاج الى زيادة عدد الغواصات عن عدد معين

نفرض الآن أن كل غواصة تعمل مستقلة عن الأخرى بدون أن تحتاج الى معونتها . نفرض أن p هى احتمال اغراق سفينة تجارية عند رؤيتها لذلك يكون متوسط عدد السفن H التى يمكن اغراقها فى الشهر بغواصات عددها N تعمل مستقلة يعطى من :

$$H = F \left[1 - \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m \varphi^m e^{-\phi} / m! \right]$$

$$= F \left[1 - e^{-\phi} e^{(1-p)\phi} \right] = F (1 - e^{-p\phi})$$

$$= F (1 - e^{-\frac{2 r N p}{w}})$$

وعدد السفن الممكن اغراقها فى هذه الحالة عندما تعمل كل غواصه مستقله عن الاخرى أقل من العـــدد الممكن اغراقه عندما تعمل الغواصات متحدة مع بعضها وذلك لأن $p < 1$ وينتج تبعـا لذلك أن

$$e^{-\frac{2 r N p}{w}} > e^{-\frac{2 r N}{w}}$$

وبذلك تكون $H < S$

٥

مسائل المدفعية والضرب بالقنابل

Gunnery and bombardment problems

سنعتبر فى هذا الباب نوعا من المسائل يتعلق بأحسن الطرق لاستعمال بعض الأسلحة المدمرة مثل المدافع والقنابل والطوربيدات وكما نعلم تستعمل كل هذه الأسلحة لتدمير الأهداف مثل السفن ومواقع المدافع والمصانع وما شابه ذلك ويمكن قياس تأثير مثل هذه الأسلحة على نوع معين من الأهداف على الأقل قياسا جزئيا بالنسبة بين عدد الأهداف التى دمرت وعدد الدانات أو القنابل أو الطوربيدات المستعملة.

التأثير التدميرى للأسلحة ـ المساحة المميتة .

The destructiveness of weapons — Lethal area

تحدث أبسط حالة فى قياس التأثير التدميرى للأسلحة عندما يكون مطلوبا إصابة السلاح للهدف لتدميره مثل استعمال دانات متوسطة العيار (حوالى ″5) ضد مواقع مدافع مفتوحة — وتكون حوائط مثل هذه المواقع عادة على قوة كافية لحماية المدافع والجنود الموجودة معها ضد تمزق الهواء والشظايا الناتجة عن الدانات التى تحدث إصابتها خارج الموقع — بينما إذا أصابت مثل هذه الدانات الموقع من الداخل فإن المدافع والجنود تدمر تماما. لذلك فأن احتمال تدمير الدانة للموقع ماهو إلا احتمال إصابة الدانة لمساحة معينة داخل الموقع وتسمى هذه المساحة بالمساحة المميتة . وتعتبر قيمة هذه المساحة قياسا لقوة تدمير الدانة للأهداف.

وكمثال أكثر صعوبة قليلا نعتبر حالة الأسلحة المضادة للغواصات . فأذا استعملت شحنة صغيرة تنفجر عند الاصطدام (contact charge) فيجب أن تصيب الشحنة الغواصة لتدميرها ونفرض عادة أن إصابة واحدة كافية لتعطيل الغواصة بحيث يتعذر أن تقوم بوظيفتها فى هذه الحالة تكون المساحة المميتة هى مساحة القطاع العرضى للغواصة . وإذا اعتبرنا حالة شحنة الأعماق (depth charge) مزودة بطابة طرقية زمنية (proximity fuze) فأنه فى الواقع لا يكون هناك داعى لأن تصيب الشحنة الغواصة لتدميرها لأن الطابة الطرقية الزمنية قد تحول الفشل فى إصابة الغواصة إلى إنفجار تدميرى . نفرض أن R هى نصف القطر الذى تؤثر فيه الطابة الطرقية الزمنية فأذا كانت الشحنة كافية بحيث أنه إذا حدث الأنفجار فى حدود بعد هذا النصف قطر عن الغواصة فإن الإنفجار يغرق الغواصة وتزداد المساحة المميتة إلى المساحة المحصورة بين المنحنى المحيط بالقطاع الأفقى للغواصة على بعد R من حدود القطاع . وأخيرا إذا اعتبرنا حالة شحنة العمق depth charge التى تنفجر على عمق معين — فلا تكون لدينا فى هذه الحالة مساحة مميتة بل حجم مميت — فلأغراق الغواصة يجب أن تنفجر شحنة العمق داخل الحجم المحصور بين سطح يحيط بالغواصة على بعد يساوى نصف القطر المميت لشحنة العمق .

الاصابات المتعددة : multiple hits.

فى كثير من الأحيان لاتكون إصابة واحدة كافية لتدمير الهدف . فمثلا إذا أصاب طوربيد واحد سفينة تجارية فأنه قد لايكون كافيا لاغراقها وتصمم الآن السفن المقاتلة الكبيرة لمقاومة إصابات متعددة بالطوربيدات . فلدراسه هذه الحالة بدقة يجب تعيين الاحتمالات D_1 ، D_2 ، D_3 ، ... الخ لاغراق السفينة عند إصابتها بعدد 1 ، 2 ، 3 ، ... من المرات . لذلك لطريقة معينة فى إلقاء الطوربيدات

على السفينة فأن احتمالات إصابتها بعدد 1 ، 2 ، 3 ، ... من المرات هى P_1 ، P_2 ، P_3 ، ... الخ وتبعا لذلك يعطى احتمال إغراق السفينة P_s من :

$$P_s = D_1 P_1 + D_2 P_2 + D_3 P_3 + \dots \dots$$

وتسمى الأحتمالات D_1 ، D_2 ، D_3 ، .... بمعاملات التخريب (damage coefficients) وقد وجد على ضوء كثير من التجارب أنه يمكن فى كثير من الأحوال ربط معاملات التخريب بالعلاقة الآتية :

$$D_n = 1 - (1 - D_1)^n \qquad (n \geqslant 1)$$

وهذا القانون ما هو الا قانون تركيب الأحتمالات المستقلة .

أو بعبارة أخرى فأن فرصة اغراق سفينة بأى اصابة طوربيد تبقى كما هى بصرف النظر عن عدد الأصابات السابقة للسفينة ويمكن تفسير ذلك بأن الطوربيد يغرق السفينة إذا أصاب نقطة حيوية (vital spot) فيها وأن جميع الأصابات فى غير هذه النقطة الحيوية تخرب السفينة بدون ان تغرقها ولا يمكن أعتبار هذا الفرض للنقطة الحيوية وصفا حقيقيا لما يحدث عندما تصاب السفن بالطوربيدات وانما يقلل هذا الفرض عدد الكميات المجهولة D_n الى مجهول واحد فقط وقد وجد أن هذه العلاقة تعطى نتائج معقولة فى أحوال كثيرة ليس فقط فى اغراق سفن البضاعة بالطوربيدات بل ايضا فى حالات كثيرة عند اصابة المدافع الجوية وقد وجد أن هذه العلاقة لا تعطى تقريب مرضى للبوارج الحربية الكبيرة المقسمة الى أقسام كثيرة .

واذا طبقنا نظرية النقطة الحيوية فأنه يمكن تعريف المساحة المميتة للهدف

بأنها حاصل ضرب المساحة المؤثرة للهدف فى الأحتمال D (وهو نفس D_1 التى استعملناها) فاصابة واحدة لهذه المساحة كافية لتدمير الهدف .

فمثلا اذا كان احتمال غرق سفينة تجارية عند اصابتها بطوربيد يساوى $\frac{1}{3}$ فأن $\frac{1}{3} = D$ وتكون قيمة المساحة المميته هى $\frac{1}{3}$ طول السفينة .

ومن الضرورى فى بعض الأحوال التعبير عن تغير احتمال تدمير الهدف كدالة للنقطة التى حدثت فيها الأصابة . وعلى سبيل المثال اذا اعتبرنا تأثير طابة طرقية زمنية على طائرة مقاتلة فأن احتمال تدمير الطائرة يكون عاليا اذا اصابت الدانة الطائرة أو مرت قريبا جدا منها . وكلما سارت القذيفه بعيدا عن الطائرة كلما قل احتمال التدمير حتى نصل فى النهاية الى بعد لا يكون للقذيفة فيه أى تأثير على الطائرة ويهبط احتمال تدمير الطائرة الى الصفر . وفى مثل هذه الحالات يجب التعبير عن هذا الأحتمال كدالة $D(x, y)$ تسمى دالة التخريب (damage function) حيث x ، y هما احداثى النقطة على الهدف فى مستوى عمودى على مسار القذيفة وفى هذه الحالة يمكن تعريف المساحة المميته L رياضيا من :

$$L = \int\int D(x,y)\, dx\, dy$$

علما بأن التكامل مأخوذ على جميع المساحة التى فيها $D(x,y)$ أكبر من صفر . ومن السهل أن نرى أن التعريفات الأبسط المساحة المميته هى حالات خاصة من المعادلة السابقة عندما تأخذ $D(x\ y)$ قيمة ثابتة على مساحة الهدف . ويمكن بطبيعة الحال كتابة المعادلة السابقة فى حالة البعد الواحد والثلاثة أبعاد

ضرب المساحات عشوائيا بالقنابل :

Random or Area Bombardment.

فى الحالات التى تسقط فيها القنابل أو الدانات عشوائيا على مساحه فأن المساحة المميتة تكون كافيه لتعيين التدمير الناشىء عنها . فلأى هدف فى المساحة فأن فرصة اصابة قنبلة أو دانة للمساحة الصغيرة $dx\,dy$ تساوى $\frac{dx\,dy}{A}$ حيث A هى المساحة الكلية التى تسقط عليها القنابل وبذلك يكون احتمال تدمير القنبلة أو الدانة للهدف هو :

$$P_1 = \int\int D\,(x, y)\ \frac{dx\,dy}{A}$$

or

$$P_1 = \frac{L}{A}$$

وإذا أسقطت قنابل أو دانات عددها n فإن إحتمال تدمير هدف معين يعطى من :

$$P_n = 1 - e^{-n\,L/A}$$

وليس ذلك فقط هو احتمال تدمير هدف واحد معين ولكنه يمثل أيضا النسبة المتوقعة لجميع الأهداف التى دمرت فى المساحة التى أسقطت عليها القنابل .

وكمثال عددى نفرض أنه مطلوب إلقاء قنابل زنه 1000 رطل على مساحة تساوى ميلا بحريا مربعا وتحتوى المساحة على 100 موقع مدفع (المساحة المميتة

لكل تساوى 400 قدم مربع) وعلى أشخاص فى خنادق (المساحة المميتة الكلية لكل شخص تساوى 900 قدم مربع)

ميل بحرى مربع يساوى 36×10^6 قدم مربع

لمواقع المدافع :

$$\frac{L}{A} = \frac{400}{36 \times 10^6} = \frac{1}{90000}$$

للأشخاص :

$$\frac{L}{A} = \frac{900}{36 \times 10^6} = \frac{1}{40000}$$

لذلك نحتاج إلى كميات باهظـة الثمن من الذخيرة لاحداث تخريبا أكثر بضرب المساحات عشوائيا .

توجيه الضرب نحو الأهداف الصغيرة :

Aimed fire — small targets.

سنعتبر الآن الحالة التى لاتلقى فيها القنابل أو الدانات عشوائيا على مساحة بل يوجه كل منها نحو هدف . وسنفرض أن أبعاد الهدف صغيرة بالنسبة للاخطاء الموجهة . وفى هذه الحالة نهمل تغير احتمال إصـابة المساحة الصغيرة dxdy فى الهدف وتكفى المساحة المميتة لتعيين التأثير التدميرى .

وإذا خضعت أخطاء القنابل إلى توزيع طبيعى (وهذا الفرض فى جانب الامن) بأنحراف معيارى فى المسافة يساوى σ_n وبانحراف معيارى فى الانحراف (deflection) يساوى σ_d فأن احتمال إصابة المساحة الصغيرة dx dy عند x , y حيث x هى خطأ المسافة ، y خطأ الإنحراف هو

$$P(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_r^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_d\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_d^2}}\, dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_r^2}-\frac{y^2}{2\sigma_d^2}}\, dx\,dy$$

وبالقرب من الهدف فأن الاحتمال يأخذ القيمة :

$$P(0,0)\,dx\,dy = \frac{dx\,dy}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}$$

احتمال تدمير الهدف بقنبلة أو دانة واحدة هو :

$$P_1 = \iint \frac{D(x,y)\,dx\,dy}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d} = \frac{L}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d} \quad \text{تقريبا}$$

وإذا أسقطت قنابل أو دانات عددها n مستقلة عن بعضها فإن احتمال التدمير هو :

$$P_n = 1-\left(1-\frac{L}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}\right)^n$$

ونظراً لأن L صغيرة بالنسبة إلى $\sigma_r\sigma_d$ حسب الفرض فأن :

$$\left(1-\frac{L}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}\right)^n = \left[\left(1-\frac{L}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}\right)^{-\frac{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}{L}}\right]^{-\frac{nL}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}}$$

$$= e^{-\frac{nL}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}}$$

عند ما تقرب $\frac{L}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}$ من الصفر — لذلك يمكن تقريبا اعتبار أن :

$$P_n = 1 - e^{-n\,L/2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}$$

ولمقارنة هذه النتيجة بحالة ضرب المساحات عشوائياً بالقنابل — نعتبر الميل المربع البحرى فى المثال السابق الذى يحتوى على 100 موقع مدفع (المساحة المميتة لكل تساوى 400 قدما مربعاً) وأن الانحرافات المعيارية لأخطاء القنابل σ_r ، σ_d كل منها يساوى 200 قدم فتكون النسبة $\frac{L}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}$ تساوى $\frac{400}{2\pi\,(200)^2}$ أى حوالى $\frac{1}{600}$

عدد القنابل التى يجب أن نتوقع القائها لتحطيم جميع مواقع المدافع التى عددها 100 هو $\frac{100}{\frac{1}{600}}$ أى 60000 قنبلة . ويجب أن نعلم أن هذا هو العدد اللازم إذا أطلقت القنابل على كل هدف حتى يدمر تماما فإذا عزمنا على القاء 600 قنبلة على كل موقع مدفع فإنه حسب المعادلة :

$$P_n = 1 - e^{-n\,L/2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d}$$

فأن نسبة الأهداف المدمرة تساوى $1 - e^{-1}$ أى 0 63 وهى نتيجة غير مرضية .

توجيه الضرب نحو الاهداف الكبيرة : Aimed Fire - Large targets

إذا تعذر الفرض بأن مساحة الهدف صغيرة بالنسبة إلى الأخطاء فأنه يكون من الضرورى أعتبار تغـــير احتمال اصابة المساحة الصغيره dx dy فى مساحة

الهدف وتفقد فكرة المساحة المميتة معظم نفعها . فأذا كانت $f(x, y)\, dx\, dy$ هى احتمال أصابة مساحة صغـــيرة فأن احتمال تدمـير الهدف بأصابة واحـدة تعطى من :

$$P_1 = \int\int D(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

ويتوقف تقدمنا بعد ذلك على استعدادنا لحساب هذا التـكامل . فأذا أمكن حسابه فأنه كما سبق يـكون عدد القنابل المتوقع القائها لتدمير الهدف يساوى $\frac{1}{P_1}$ واحتمال تدمير الهدف بقنابل عددها n هو

$$P_n = 1 - (1 - P_1)^n$$

فأذا كانت P_1 صغيرة فأن :

$$P_n = 1 - \left[(1 - P_1)^{-\frac{1}{P_1}}\right]^{-n P_1} = 1 - e^{-n P_1}$$

وذلك عندما تقرب P_1 من الصفر .

وإذا أخذت الدالة $D(x, y)$ قيمة ثابتة D فى كل مساحة الهدف فأن المعادلة السابقة :

$$P_1 = \int\int D(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

تمثـل فرصة أصابة الهدف مضروبة فى D . فأذا كان شـكل الهدف بسيطا

وكانت دالة كثافة الأحتمال $f(x, y)$ غير معقدة فأنه يمكن حساب هذا التكامل . وكمثال على هذا النوع من الحسابات نعتبر المسألة الآتية :

تطلق غواصة طوربيدات على سفينة تجارية طولها 200 قدم على زاوية 90° فأذا كانت أخطاء اطلاق الطوربيدات موزع توزيعا طبيعيا بخطأ معيارى يساوى $\frac{1}{10}$ واطلقت الطوربيدات من بعد 2000 ياردة واحتمال اغراق السفينة بالنسبة للاصابة بطوربيد واحد يساوى $\frac{1}{3}$ أوجد فرصة اغراق السفينة عند اطلاق طوربيدات عددها n كل مستقل عن الآخر .

الانحراف المعيارى للطوربيدات بالنسبة إلى المسافة على خط الهدف يساوى:

$$\frac{1}{10} \times 2000 = 200 \text{ yards} = 600 \text{ ft}$$

لذلك فأحتمال وقوع خطأ بين x ، $x + dx$ مقاسا من مركز الهدف هو :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 600} e^{-\frac{x^2}{2(600)^2}} dx$$

لذلك يكون احتمال إصابة السفينة هو :

$$\int_{-100}^{100} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 600} e^{-\frac{x^2}{2(600)^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (\text{بوضع } \frac{x}{600} = t)$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{6}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.132$$

احتمال اغراق السفينة يساوى : $\frac{1}{3} \times 0.132 = 0.044$

احتمال اغراق السفينة باطلاق طوربيدات عددها 1 ، 2 ، ... ، 6 يعطى من القانون السابق .

$$P_n = 1 - e^{-n P_1}$$

وينتج أن :

إحتمال اغراق السفينة	عدد الطوربيدات
0.044	1
0.086	2
0.126	3
0.165	4
0.202	5
0.237	6

عدد الطوبيدات المتوقع اللازم لاغراق السفينة يساوى $23 = \frac{1}{0.044}$

وكمسألة أخرى نعتبر مثال مواقع المدافع السابق — نفرض أن المواقع دائرية نصف قطر كل منها 11 قدما ونفرض ان $D(x,y) = 1$ داخل نصف القطر ،

0 خارج نصف القطـر . سنفرض أن الانحرافين المعيـارين للخطأين في المسافة والانحراف يساوى كل منها 50 قدما بدلا من القيم المفروضة سابقا .

$$P(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi\,(50)^2}\, e^{-(x^2+y^2)/2(50)^2}\, dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\,(50)^2}\, e^{-\frac{r^2}{2(50)^2}}\, r\, d\theta\, dr$$

وذلك باستعمال الاحداثيات القطبية العادية (r, θ)

$$P_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{11} \frac{1}{2\pi\,(50)^2}\, e^{-\frac{r^2}{2(50)^2}}\, r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{\frac{11}{50}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, t\, dt \qquad \left(\text{بوضع } \frac{r}{50} = t\right)$$

$$= -\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)_0^{\frac{11}{50}} = 0.0239$$

واذا قارنا هذه النتيجة بنتيجة نظرية الهدف الصغير نجد أن :

$$P_1 = \frac{L}{2\pi\,\sigma_r\,\sigma_d} = \frac{\pi\,(11)^2}{2\pi\,(50)^2} = 0.0242$$

لذلك يعطى التقريب بنظرية الهدف الصغير نتيجـة مرضية — ومن جهـة

اخرى اذا كان نصف قطر موقع المدفع يساوى 50 قدما بدلا من 11 فأن :

$$P_1 = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\, t\, dt = -\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)_0^1 = 0.39$$

بينما فى حالة الهدف الصغير فان :

$$P_1 = \frac{\pi (50)^2}{2\pi (5)^2} = 0.50$$

لذالك لا تكون نتيجة التقريب باستعمال نظريه الهدف الصغير مرضيه .

طبع
روبان
تليفون ٩٣٣٤٩١ اسكندرية

بيان مجموعة الـــكتب الرياضية

		ص
١ — مائة مسألة محلولة :	فى الجبر وحساب المثلثات ، والهندسة التحليلية	٦٠
٢ — مائة مسألة محلولة :	فى التحليل الرياضى (التفاضل والتكامل)	٦٠
٣ — مائة مسألة محلولة :	فى الاستاتيكا الهندسية	٦٠
٤ — مائة مسألة محلولة :	فى المعادلات التفاضلية والتفاضل والتكامـــل العادى	٨٠
٥ — الطرق العددية :	التقريب المتتالى والمعادلات الجبرية وغــير الجبرية — الفروق المحدوده ، وتطبيقها فى الحل العددى للمعادلات التفاضلية العادية والجزئية والبرنامج الخطى .	٦٥
٦ — الرياضة للهندسة المدنية :		٥٥
٧ — الهندسة الوصفية :		١٥٠
٨ — ميكانيكا الموائع :	(انجليزى — عربى)	تحت الطبع
٩ — الرياضة للمسائل العسكرية والصناعية		٦٠

الثمن ٦٠ ص قرشاً